PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 15. 1. August 1921. Redaktionsschluß für No. 17 am 5. August 1921. 22. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

A. Landé, Anomaler Zeemaneffekt und Seriensysteme bei *Ne* und *Hg*. S. 417.

G. Hoffmann, Zur Erklärung der unipolaren Leitung. S. 422.

F. Dessauer, Steigerung der sekundären Energie beim Funkeninduktor. S. 425.

A. March, Die Energieverteilung im kontinuierlichen Röntgenspektrum. S. 429.

E. Schmid, Zur Präzision der Fall- und Steigversuche. S. 438.

H. Simon, Bemerkung zu „Über die Verwertung des Spiegelbildes in der Photogrammetrie" von W. Kramer. S. 441.

Zusammenfassende Bearbeitungen:

J. Franck, Über Lichtanregung und Ionisation von Atomen und Molekülen durch Stöße langsamer Elektronen. (Fortsetzung.) S. 441.

Tagesereignisse. S. 448.

Personalien. S. 448.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Anomaler Zeemaneffekt und Seriensysteme bei *Ne* und *Hg*.

Von A. Landé.

Inhalt: § 1. Spektroskopische Aufspaltungsregeln im Magnetfeld. § 2. Das Neonspektrum. § 3. Das Quecksilberspektrum.

§ 1. Die quantentheoretisch begründete Synthese der anomalen Zeemantypen aus magnetischen Termen[1]) läßt sich, unabhängig von jeder theoretischen Deutung als spektroskopische Tatsache gefaßt, wie folgt darstellen. Die Schwingungszahl ν_0 einer Spektrallinie ist die Differenz zweier Terme W und W'. Durch ein magnetisches Feld wird jeder Term W für sich in mehrere Einzelterme $W+Z$, zerspalten, wobei die dem Feld H proportionalen Zusatzschwingungszahlen Z eine Anzahl verschiedener Werte annehmen. Eine bestimmte Aufspaltungslinie (Parallel [π]- oder Senkrecht [σ]-Komponente bei transversaler Beobachtung) hat also die Schwingungszahl

$$\nu = (W+Z)-(W'+Z') = (W-W')+(Z-Z') = \nu_0 + \Delta\nu. \quad (1)$$

Daher ist ihr Abstand $\Delta\nu$ vom Ort der unzerspaltenen Linie

$$\Delta\nu = Z - Z'. \quad (1')$$

Die für einen Term W charakteristische Reihe der magnetischen Aufspaltungsterme Z berechnet man auf folgende Weise. Jeder Term W wird in der Spektroskopie durch gewisse Buchstaben (s, p, d, ..) und Indizes (p_1, p_2, p_3..) bezeichnet. Statt dessen charakterisieren wir ihn durch (zunächst zwei) ganze Zahlen n und k (siehe die von Sommerfeld[2]) übernommene Zuordnung (Teil I Tabelle 2) und behaupten:

Zum Term n, k gehört die Wertereihe

$$\left.\begin{array}{l} Z = m\cdot\omega_0\cdot g \text{ mit} \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm k \\ \text{bei Einfach- und Triplettermen,} \\ m = \pm\tfrac{1}{2}, \pm\tfrac{3}{2}, \pm\tfrac{5}{2}, \ldots \pm(k-\tfrac{1}{2}). \\ \text{bei Dublettermen.} \end{array}\right\} \quad (2)$$

wobei

$$\omega_0 = \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{H}{4\pi c}, \quad (2')$$

worin g eine unten noch näher zu bestimmende Funktion von n und k ist, und ω_0 den Abstand der σ-Komponente in Wellenzahlen von der Bildmitte im normalen Zeemantriplett bei der Feldstärke H angibt. Es wird also nach (1') der Abstand $\Delta\nu$ einer Komponente von der Bildmitte im Maß ω_0:

$$\Delta\nu\,\omega_0 = m\cdot g - m'\cdot g'.$$

Die s, p, d, ... Terme besitzen der Reihe nach die Zahlen $n = 1, 2, 3, \ldots$, für welche die übliche Serienkombinationsregel gilt:

A) Es werden nur die Terme kombiniert, bei denen $n - n' = \pm 1$ ist.

Für die Zahlen k bzw. k' der beiden Terme gilt ferner nach Sommerfeld l. c. die Auswahlregel:

B) Es werden nur die Terme kombiniert, bei denen $k - k' = 0$ oder $= \pm 1$ ist.

Wir ergänzen diese Regel durch den Zusatz:

B') Die Kombination $k = 0 = k'$ fällt aus.

C) Es treten allein diejenigen σ- und π-Komponenten wirklich auf, bei denen $m - m' = \pm 1$ ist (σ-Komponenten), oder bei denen $m - m' = 0$ ist (π-Komponenten).

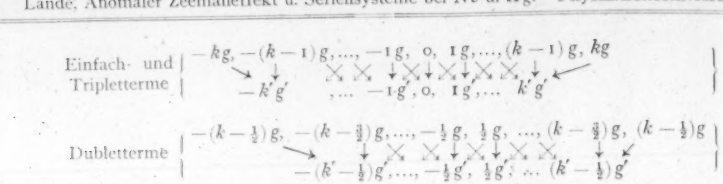
C') Die Kombination $m = m'$ bei $k - k' = 0$ fällt aus (Teil I § 5).

Man konstruiert nach (1') (2) die Lagen der Zeemankomponenten $\Delta\nu$ aus den Aufspaltungstermen Z und Z' mit Hilfe des folgenden Schemas (3) (3'). Man schreibt zunächst die Wertereihe $m\cdot g$ und $m'\cdot g'$ der beiden Terme W und W' hin, gleiche m untereinander (Beispiel Tabelle 3):

---

1) A. Landé, Über den anomalen Zeemaneffekt, Teil I. Zeitschr. f. Phys. **5**, 231, 1921, zitiert als Teil I. Dort ist in Gl. (4') der Druckfehler $\omega/\omega_0 =$ zu verbessern in $\epsilon =$. In Tab. 3 bei (sd_2) ist $\sigma = 12/6$ zu ergänzen.

2) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **63**, 221, 1920.



Bildet man nun in (3) (3′) die Differenz zwischen zwei Gliedern der ersten und zweiten Zeile, die durch einen senkrechten (bzw. 45° geneigten) Pfeil verbunden sind, $m - m' = 0$ (bzw. $m - m' = \pm 1$), so erhält man nach (2) und (C) die Werte $\Delta\nu/\omega_0$ für die π-Komponenten (bzw. σ-Komponenten). Dabei ist (C′) zu beachten. Wegen (B) folgt u. a. als Regel für die Anzahl der so erhaltenen Komponenten:

α) Bei der magnetischen Aufspaltung einer Dublettlinie ist die Anzahl der π-Komponenten (d. i. die Anzahl der senkrechten Pfeile in (3′)) doppelt so groß wie die kleinere der beiden Zahlen k und k'.

β) Bei der magnetischen Aufspaltung einer Triplettlinie ist die Anzahl der π-Komponenten stets gleich $k + k'$. Doppelt so groß ist die Anzahl der σ-Komponenten.

β') Speziell ist im Falle $k - k' = 0$ eine π-Komponente in der Bildmitte nicht vorhanden (C′).

Ferner sieht man aus (3) (3′) sofort:

γ) Die π-Komponenten folgen einander in gleichen Abständen $\Delta = g - g'$. Dasselbe gilt für die rechts und die links der Bildmitte liegenden Gruppen der σ-Komponenten.

γ') Dabei ist im Sonderfall (β') eine π-Komponente in der Bildmitte ergänzt zu denken.

Regeln für die relative Intensität der einzelnen Komponenten heißen für $k - k' \neq 0$ [bzw. $k - k' = 0$]:

δ) Diejenigen π-Komponenten sind die stärksten [schwächsten], welche durch Pfeile in der Mitte des Übergangsschemas (3) (3′) dargestellt werden; diejenigen σ-Komponenten sind die stärksten [schwächsten], welche durch Pfeile am rechten und linken Rande des Übergangsschemas dargestellt werden.

Die Lage der einzelnen Komponenten hängt noch von den Werten der Faktoren $g(k, n)$ ab. Bei den Dubletts fanden wir in Teil I die einfache Zusammensetzung $g = k : (n - \frac{1}{2})$ dieses Faktors, bei den Tripletts kompliziertere Funktionen (Teil I Gl. 12). Letztere werden wir demnächst im Teil II zusammen mit denen der sogenannten Einfachterme zu einheitlichen Formeln zusammenfassen. Die quantentheoretische Begründung obiger magnetooptischer Kombinationsregeln und ihre Anwendung auf die Zerlegungen der vollständigen Dubletts und Tripletts war im Teil I gegeben, mit Ausnahme von (B), deren Erklärung noch aussteht.

Wir wollen jetzt fortschreiten zu dem gemischten System von Einfach- und Triplettermen, wie es beim *Hg*-Spektrum und beim *Ne*-Spektrum vorliegt.

§ 2. F. Paschen[1]) hat nach Vorarbeiten von Watson[2]) und Meißner[3]) auf Grund seines umfangreichen Beobachtungsmaterials fast sämtliche 800—900 Bogenlinien des Neonspektrums in ein System von Serien eingeordnet und in Terme aufgelöst. Er erhielt vier s-Termfolgen, zehn p-, vier s'- und acht d-Termfolgen. Diese kombinieren aber nur in begrenzter Auswahl. Zum Beispiel treten die zehn p-Termfolgen mit den vier s-Termfolgen nicht zu $10 \times 4 = 40$, sondern nur zu 30 Hauptserien zusammen usw., in Analogie zu Rydbergs Auswahl der „vollständigen" Dubletts und Tripletts.

Die vorkommenden Serien sind in Paschens Tabelle IV zusammengestellt oder auch aus W. Grotrians[4]) übersichtlicher graphischer Darstellung zu ersehen. Wir suchen nun in dieser Serienauswahl das Wirken desselben quantentheoretischen Auswahlprinzips (B), das von Sommerfeld[5]) zur Ordnung der vollständigen Dubletts und Tripletts durch formale Einführung „innerer" Quantenzahlen angewendet wurde (siehe Teil I § 1). Aus der Serienauswahl im Neonspektrum kann man durch einiges Probieren rückwärts auf die „innere" Quantenzahl k jedes Terms schließen auf Grund von (B) (B′) und gelangt so zu der in Fig. 1 gegebenen Zuordnung. An den linken Rand der horizontalen Linien sind die Zahlenwerte k angeschrieben, an den rechten Rand die zugehörigen Terme in Paschens Bezeichnung. Diese Zuordnung findet sich dann nachträglich bestätigt, wenn wir gemäß (B) Pfeile zwischen je zwei horizontalen Linien ziehen, welche gleiches k oder

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. **60**, 405, 1919; **63**, 201, 1920.
2) H. E. Watson, Proc. Cambridge Phil. Soc. **16**, 130, 1902.
3) K. W. Meißner, Ann. d. Phys. **58**, 333, 1919.
4) W. Grotrian, diese Zeitschr. **21**, 639, 1920.
5) A. Sommerfeld, l. c. und auch: Atombau und Spektrallinien, 2. Auflage, S. 540.

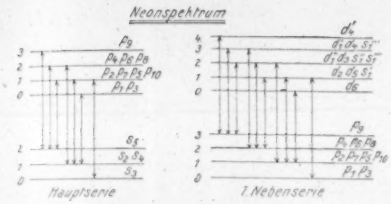


Fig. 1.

um ± 1 differierendes k besitzen. Nach (B) sind Übergänge zwischen $k = 0$ und $k' = 0$ auszulassen. Diese Pfeile geben dann in der Tat die beobachteten Serien richtig wieder, bis auf geringe Ausnahmen, die auch in dem Schema von Grotrian störend auftraten. Es sind nämlich zwei Linien schwacher Intensität vorhanden, welche Paschen einer in das Schema nicht hineinpassenden Serie $2p_2 - md_4$ zuschreibt; es fehlen ferner in der Beobachtung die Serienlinien $2p_2 - md_1''$, $2p_8 - md_1''$, $2p_5 - md_5$, $2p_7 - md_5$, $2p_9 - ms_1''$. Gegenüber den über hundert Serien, die nach obiger Zuordnung k richtig und vollständig eintreffen, fallen jedoch diese 5 fehlenden nicht ins Gewicht. „Es wäre aber wohl wünschenswert, nach diesen fehlenden Serien noch einmal besonders zu suchen" (Grotrian).

Aus der getroffenen Zuordnung k, indirekt also aus dem vollständigen Schema der Kombinationsserien des Neons, können nun nach § 1 eine Reihe von Aussagen über die zu erwartenden anomalen Zeemantypen der betreffenden Serien gemacht werden.

Zunächst ist auf Grund von (β) die Anzahl der π- und σ-Komponenten für jede Termkombination eindeutig angebbar. Zum Beispiel muß die Serie ($s_5\, p_4$) mit $k = 2$, $k' = 2$ im Magnetfeld $2 + 2 = 4$ π-Komponenten und 4 rechte und 4 linke σ-Komponenten zeigen. Wegen $k = k'$ ist in der Bildmitte keine π-Komponente vorhanden (β').

Die Einzelheiten des Zeemanbildes hängen von den charakteristischen Faktoren g und g' der beteiligten Terme ab. Da aber derselbe Term mit seinem g in verschiedenen Kombinationen wiederkehrt, genügt es, sein g aus einer dieser Kombinationen zu analysieren, um dieses g bei der Bildung andrer Kombinationen verwenden zu können. Kennt man z. B. den Wert g für einen Term (s_4 hat $g = \frac{3}{2}$), und findet in dem Zeemanbild der Kombination dieses Terms mit einem andern den Abstand Δ zwischen je zwei σ-Komponenten (die Serie ($s_4\, p_8$) hat im Zeemanbild den Abstand $\Delta = \frac{1}{3}$ zwischen je zwei σ-Komponenten), so ist wegen (γ) sofort auch $g' = g - \Delta$ bekannt (p_8 hat $g' = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}$). Auf diese Weise gelangt man sukzessive dazu, aus wenigen exakt beobachteten Zeemantypen die g-Werte aller Terme zu analysieren und durch ihre wechselseitige Kombination die übrigen Zeemantypen vorauszusagen oder unsicher beobachtete Typen zu kontrollieren. Dabei kann stets das Schema ($3'$) als sicherer Führer benutzt werden bzw. die Regeln (β) (β') (γ) und die Intensitätsregel (δ).

Zum Beispiel sieht man einem von der Beobachtung gelieferten Typ sofort an, ob er einer Richtigstellung bedarf. Wenn etwa als Zeemantyp von ($p_6\, s_5$) angegeben wird: π-Komponenten bei $\pm\frac{2}{6}, \pm\frac{3}{6}$, σ-Komponenten bei $\pm\frac{6}{6}, \pm\frac{7}{6}, \pm\frac{8}{6}, \pm{}^{10}/_{6}$, so findet sich Regel ($\gamma$) nicht erfüllt und fordert eine Korrektion des ja oft als unsicher bezeichneten Versuchsergebnisses.

Auf dem angegebenen Wege gelangt man zur Tabelle 1 für die magnetischen Aufspaltungsreihen $m \cdot g$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, .. \pm k$) der verschiedenen Neonterme und durch Kombination nach ($3'$) zu den sichtbaren Aufspaltungsbildern in der Hauptserie (Tabelle 2). In Tabelle 2 sind die theoretischen Aufspaltungen und die experimentellen von Lohmann[1]) und Takamine und Yamada[2]) zusammengestellt,

Tabelle 1

für $m \cdot g$ bei Neon.

Term	m / k	0	± 1	± 2	± 3
p_9	3	0	$\pm {}^{4}/_{3}$	$\pm {}^{8}/_{3}$	$\pm {}^{12}/_{3}$
p_4	2	0	$\pm {}^{4}/_{3}$	$\pm {}^{8}/_{3}$	
$p_6\, p_5$	2	0	$\pm {}^{7}/_{6}$	$\pm {}^{14}/_{6}$	
p_2	1	0	$\pm {}^{4}/_{3}$		
p_7	1	0	$\pm {}^{2}/_{3}$		
$p_3\, p_{10}$	1	0	± 1		
$p_1\, p_3$	0	0			
s_5	2	0	$\pm {}^{3}/_{2}$	$\pm {}^{6}/_{2}$	
s_4	1	0	$\pm {}^{3}/_{2}$		
s_2	1	0	± 1		
s_3	0	0			

und zwar bereits in der von Krönert[3]) auf die richtigen Rungeschen Nenner und auf ganzzahlige Zähler reduzierten Form.

Auch die relativen Intensitäten der π- und σ-Komponenten innerhalb eines Typs können nach Regel (δ) angegeben werden.

Für die Typen der 1. Nebenserie können gemäß der Zuordnung k in Fig. 1 die Anzahl der π- und σ-Komponenten nach (β) (β') eben-

1) W. Lohmann, Dissertation, Halle 1907.

2) Takamine u. Yamada, Proc. Tokyo Math. Phys. Soc. 7, 277, 1913—1914.

3) J. Krönert, Dissertation, München 1920 (ungedruckt); vgl. auch A. Sommerfeld l. c. § 4.

Tabelle 2.

Serie	Theorie	Beobachtung
$s_2 p_1$ $s_2 p_{10}$ $s_3 p_2$	(0) 1 / 1	(0) 1 / 1
$s_2 p_3$ $s_2 p_5$ $s_3 p_{13}$	1	?
$s_3 p_2$	(0) 4 / 3	(0) 4 / 3
$s_3 p_7$	(0) 2 / 3	(0) 2 / 3
$s_4 p_1$ $s_4 p_3$	(0) 3 / 2	(0) 3 / 2
$s_4 p_2$	(1) 8, 9 / 6	(1) 8, 9 [1] / 6
$s_4 p_7$	4 (5) 9 / 6	4 (5) 9 / 6
$s_2 p_2$	(1) 3, 4 / 3	(1) 3, 4 / 3
$s_2 p_7$	(1) 2, 3 / 3	?

Abweichende Beobachtungen von Lohmann:

1) $\frac{(1)\ 3,\ 4}{6}$ 2) $\frac{(0)\ (1)\ 6,\ 7,\ 8}{6}$;

3) $\frac{(1)\ (2)\ 6,\ 7,\ 8,\ 9}{6}$.

Die eingeklammerten Ziffern bedeuten π-Komponenten. Die Pfeile über den Ziffern sind in der Richtung der theoretisch zu erwartenden Intensitätszunahme gezogen (Pfeilspitze über der stärksten σ- bzw. π-Komponente).

Tabelle 2a.

Serie	Theorie	Beobachtung
$s_3 p_5$ $s_3 p_{10}$	(0) (1) 2, 3, 4 / 2	(0) (1) 2, 3, 4 / 2
$s_2 p_4$	(0) (1) 3, 4, 5 / 3	(0) (2) 6, 8, 9 / 6
$s_2 p_6$ $s_2 p_8$	(0) (1) 6, 7, 8 / 6	(0) (1) 7, 8, 9 / 6
$s_4 p_4$	(0) (1) 7, 8, 9 / 6	(0) (1) 7, 8, 9 [2] / 6
$s_4 p_6$ $s_4 p_8$	(0) (2) 5, 7, 9 / 6	(0) (2) 6, 7, 9 / 6 (0) (2) 5, 7, 9 / 6
$s_3 p_2$	(0) (1) 8, 9, 10 / 6	(0) (1) 8, 9, 10 / 6
$s_3 p_7$	(0) 4 (5) 9, 14 / 6	(0) 4 (5) 9, 14 / 6
$s_3 p_4$	(1) (2) 7, 8, 9, 10 / 6	(1) (2) 7, 8, 9, 11 [3] / 6
$s_3 p_6$ $s_3 p_8$	(2) (4) 5, 7, 9, 11 / 6	(2) (3) 6, 7, 9, 10 / 6 (2) (4) 4, 7, 8 11 / 6
$s_3 p_9$	(0) (1) (2) 6, 7, 8, 9, 10 / 6	(0) (1) (2) 6, 7, 8, 9, 10 / 6

falls exakt angegeben werden, die Einzelheiten der betreffenden Typen aber nur in einigen besonderen Fällen, da zur Analyse von g-Werten für die $s^{(i)}$, d und $d^{(i)}$-Terme nur wenig Material vorliegt[1]).

Bemerkenswert ist, daß die Neonterme s, p, d sich nach ihrer kleinsten Laufzahl 1,5; 2; 3 ebenso verhalten, wie auch beim *Hg* die Terme s, p, d. Nach ihrer magnetischen Aufspaltung (Tabelle 1) und nach ihren Zahlen k verhalten sie sich dagegen analog den Termen p, b, d des *Hg*.

Man kann gemäß Tabelle 1 die verschiedenen Terme des Neonspektrums entsprechend ihrer magnetischen Aufspaltung einteilen in „Einfachterme“ mit $g = 1$ bzw. mit unbestimmten g (letzteres bei $k = 0$ und deshalb fehlender Termaufspaltung) und „Tripletterme“ mit $g \pm 1$. Nach Tabelle 1 wären zu bezeichnen als

Einfachterme: $s_2\ s_3\ p_1\ p_3\ p_5\ p_{10}$,

Tripletterme: $s_4\ s_5\ p_2\ p_7\ p_4\ p_6\ p_8\ p_9$,

was auch Paschen l. c. S. 413 bemerkt.

Nach Paschen besteht also das Neonspektrum aus Serien kombiniert aus je zwei „Einfachtermen“, Serien kombiniert aus je zwei „Tripletterme“ und Serien aus einem Einfach- und einem Tripletterm kombiniert. Jedoch ist, wie in Teil II gezeigt werden soll, eine prinzipielle Unterscheidung zwischen „Einfach“- und „Triplett“-Termen nach ihrer magnetischen Aufspaltung nicht wesentlich. Man kann nämlich zeigen, daß alle Tripletterme, auch die beim Neon auftretenden neuartigen, zusammen

1) J. Krönert bemerkt l. c., daß die von Franck und Hertz gemessene Ionisierungsspannung des Neon von 16 Volt einem Grundterm $\nu = 130\,000\ \mathrm{cm}^{-1}$ entspricht, während der größte optisch in Erscheinung tretende Serienterm $(1{,}5\ s_3)$ $\nu = 39888$ hat. Das Neonspektrum hat also bereits „angeregte“ Zustände als Grundbahnen.

mit den Einfachtermen in ihren Faktoren g einem einheitlichen Gesetz gehorchen, und daß der unter anderen resultierende Wert $g = 1$ neben gebrochenen g-Werten sachlich keinerlei bevorzugte Rolle spielt.

Diese Bemerkung gilt auch für das *Hg*-Spektrum, welches als Typus eines Einfach-Triplettseriensystems besprochen werden soll[1]).

§ 3. Das *Hg*-Spektrum wurde von Paschen, Kayser und Runge, Eder und Valenta, Stiles, Miller aufgelöst in ein System von Einfachtermen S, P, D, und Triplettermen s; $p_1\, p_2\, p_3$; $d_1\, d_2\, d_3$, die untereinander und wechselseitig kombinieren. In Fig. 2 sind diese Terme

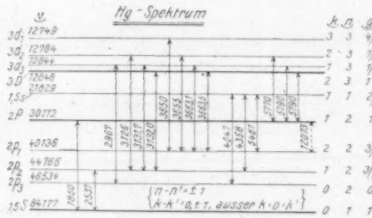


Fig. 2.

mit niedrigster Laufzahl (z. B. $1{,}5\,S$) nach ihren Wellenzahlen ν geordnet und als horizontale Grade dargestellt. An den rechten Rand der Graden sind die (nachträglich zu bestätigenden Gesamtquanten-)Zahlen k angeschrieben, die bei der Serienauswahl (B) (B'), § 1 maßgebend sind. Weiter rechts stehen die magnetischen Aufspaltungsfaktoren g (Teil I Tab. 2) bzw. $g = 1$ bei den Einfachtermen. Kombinationen sind zugelassen zwischen den Termen mit $k - k' = \pm 1$ oder $= 0$ (Auswahlregel B) unter Ausschluß von $k = k' = 0$ (B'). Die Kombinationen sind durch Pfeile dargestellt mit angeschriebener Wellenlänge λ der betreffenden Spektrallinie.

Den Termen s und S, p und P, d und D,.. sind der Reihe nach die (azimutalen Quanten-)Zahlen $n = 1, 2, 3, \ldots$ zugeordnet, für deren Änderung die Auswahlregel (A) gilt. Die von $1{,}5\,S$ ausgehenden zwei Pfeile sind die beiden Absorptionslinien $\lambda = 2537$ und $\lambda = 1849$ des *Hg*. Sie sind Resonanzlinien, da von $2p_2$ und von $2P$ nur der ganze Zurücksprung nach $1{,}5\,S$ möglich ist. Die Zustände $2p_1$ und $2p_3$ können dagegen wegen (B) und (B') weder von $1{,}5\,S$ erreicht werden noch nach $1{,}5\,S$ zurückfallen, sind also metastabil. Die Kombinationslinien $(1{,}5\,S - 2p_1)$ und $(1{,}5\,S - 2p_3)$ sind verboten $(1{,}5\,S - 2p_2)$ ist erlaubt, $(2P - 2d_1)$ ist wegen (B) verboten, $(2P - 3d_2)$ und $(2P - 3d_3)$ erlaubt; $(2p_3 - 3D)$ ist verboten, $(2p_1 - 3D)$ und $(2p_2 - 3D)$ erlaubt, in Übereinstimmung mit dem beobachteten Emissionsspektrum des Quecksilbers.

W. Miller[1]) gibt als schwachen Zugleiter von $(2\gamma_3 - 3d_3)$ die Linie $(2\gamma_3 - 3D)$ an. Man hat hier also einen Fall der Durchbrechung der Auswahlregel (B).

Aus dem vollständigen Kombinationsschema des *Hg*-Spektrums (Fig. 2). der Metastabilität von p_1 und p_3 und der Resonanz von $\lambda = 2537$ konnte also auf Grund von (B) (B') die Zuordnung der Zahlen k zu den einzelnen Termen gewonnen bzw. nachträglich bestätigt werden. Nachdem aber diese Zuordnung k festgestellt ist, können daraus theoretische Angaben über die zu erwartenden Zeemantypen der einzelnen Linien gemacht werden, zunächst über die Anzahl der π- und σ-Komponenten nach (β) (β'), § 1. Die Einzelheiten der Aufspaltungsbilder hängen noch von den g-Werten der Terme ab. In Teil I Gl. (12') sind die g-Werte für die Triplettterme bereits analysiert; für die Einfachterme ist $g = 1$ zu nehmen. Daher kann man jetzt die Zeemantypen für die gemischten Einfach-Triplettkombinationen voraussagen nach der Methode des § 1 Schema (3'). Man erwartet danach theoretisch aus den rechts in Fig. 2 angeschriebenen Aufspaltungsfaktoren g der Terme folgende Typen (Tabelle 3):

Tabelle 3.

$S\ \{0\}$ $p_2\ \{-3/2\ 0\ 3/2\}$	$P\ \{-1\ 0\ 1\}$ $s\ \{-2/1\ 0\ 2/1\}$	$D\ \{-2\ -1\ 0\ 1\ 2\}$ $p_3\ \{0\}$
$(Sp_2)\ \frac{(0)\ 3}{2}$	$(sP)\ \frac{(1)\ 1,\ 2}{1}$	$(p_3D)\ \frac{(0)\ 1}{1}$
$D\ \{-2\ -1\ 0\ 1\ 2\}$ $p_2\ \{-3/2\ 0\ 3/2\}$		$P\ \{-1\ 0\ 1\}$ $d_2\ \{-14/6\ -7/6\ 0\ 7/6\ 14/6\}$
$(p_2D)\ \frac{(0)\ (1)\ 1,\ 2,\ 3}{2}$		$(d_2P)\ \frac{(0)\ (1)\ 6,\ 7,\ 8}{6}$
$D\ \{-2\ -1\ 0\ 1\ 2\}$ $p_1\ \{-6/2\ -3/2\ 0\ 3/2\ 6/2\}$		$P\ \{-1\ 0\ 1\}$ $d_3\ \{-1/2\ 0\ 1/2\}$
$(p_1D)\ \frac{(1)\ (2)\ 1,\ 2,\ 3,\ 4}{2}$		$(d_3P)\ \frac{(1)\ 1,\ 2}{2}$

1) Nachtrag bei der Korrektur. Aus der Dissertation von Lohmann, die mir erst jetzt im Original zugänglich wird, ersehe ich, daß die gemessenen Intensitäten bei den *Ne*-Aufspaltungen sämtlich in voller Übereinstimmung mit den theoretischen Intensitäten (Tab. 2a) stehen. Dadurch wird die Intensitätsregel (δ) und ihre quantentheoretische Ableitung (Teil I § 5) von neuem gestützt.

1) W. Miller, Ann. d. Phys. **24**, 105, 1907.

Die Aufspaltungen von $(p_1 D)$, $(p_2 D)$, $(p_3 D)$ sind bestätigt durch W. Miller l. c., $(d_2 P)$ durch Lohmann l. c., (Sp_2) durch Paschen[1]; auch hinsichtlich der Intensitäten. Über die Zerlegungen von (sP) und $(d_2 P)$ scheint experimentell nichts bekannt zu sein.

Zusammenfassung: In § 1 werden die früheren Ergebnisse der quantentheoretischen Zeemantermanalyse als spektroskopische Kombinations-, Polarisations- und Intensitätsregeln zusammengestellt. In § 2 und § 3 wird das vollständige Seriensystem von Ne und Hg durch eine Auswahlregel geordnet, nach Art von Sommerfelds Auffassung der „vollständigen" Dubletts und Tripletts, und aus der erhaltenen Ordnung mit Hilfe der Regeln des § 1 für jede Serie ihr Zeemantyp erhalten. Die Übereinstimmung mit der Erfahrung über Anzahl, Lage und Intensität der Zeemankomponenten bestätigt den Zusammenhang zwischen den magnetischen Aufspaltungstypen und den feldlosen Linienmultiplizitäten, der früher auf quantentheoretischer Grundlage entwickelt wurde.

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. **35**, 877, 1911.

Frankfurt a. M., Institut für theoret. Physik.

(Eingegangen 27. Juni 1921.)

Zur Erklärung der unipolaren Leitung.

Von G. Hoffmann.

I.

Schon F. Braun[1]) hat in seinen grundlegenden Arbeiten über die unipolare Leitung in Kristallen den Nachweis zu führen gesucht, daß es sich um eine Erscheinung handelt, die ihren Sitz in der Übergangsschicht zwischen der metallischen Zuleitung und der Kristallmasse hat, aber nicht auf bekannte Ursachen—Thermoelektrizität und galvanische Polarisation—quantitativ zurückgeführt werden kann. Beide Erscheinungsgruppen spielen mit hinein, ohne ausschlaggebend beteiligt zu sein. Schon in seiner ersten Publikation konstatierte Braun durch eine Wippenschaltung, die es ermöglichte, den Kristall mit seinen Zuleitungen aus dem Stromkreis, in dem er unipolare Leitung zeigte, herauszunehmen und möglichst rasch in einen Galvanometerkreis einzuschalten, das Nichtvorhandensein einer thermoelektrischen Erregung oder Polarisation, welche „auch nur entfernt imstande wäre, die Erscheinungen zu erklären". Schärfere Nachprüfung dieser Tatsache durch Stimmgabelschaltung durch Braun und andere Autoren gab das gleiche negative Resultat. Trotzdem ist die Thermoelektrizität zur Erklärung der Wirkung der Kristalldetektoren herangezogen worden. Erst durch die kürzlich erschienene Arbeit von Ettenreich[1]) ist der thermoelektrischen Theorie der Detektorwirkung wohl endgültig der Boden entzogen worden. Ettenreich konnte nachweisen, daß die Kontaktstelle in ihren die Stromrichtung bestimmenden Eigenschaften in Zeiträumen, die nach Milliontel Sekunden zählen, den Stromschwankungen zu folgen vermag. Das sind Frequenzen, die für Temperaturänderungen unmöglich sind.

Die galvanische Polarisation, die Braun ablehnte als zur quantitativen Erklärung seiner Versuche ungeeignet, wird von Huinzinga[1]) neuerdings zur Erklärung der Gleichrichterwirkung der Kristalldetektoren herangezogen. Er prüft verschiedene Kombinationen von Kristallen unter sich und mit Metallen in Schwingungskreisen auf ihren Detektoreffekt und nimmt dann die Gleichstromcharakteristik für diese Kombinationen auf. Er findet bei zwei Kombinationen, Platinspitze—Molybdänglanz und Platin—Eisenpyrit nach Hindurchleiten von einem Milliampere in Zimmerluft nach kurzer Zeit deutlich sichtbare Spuren von chemischer Zersetzung, schließt hieraus, daß es sich bei diesen beiden Kombinationen um chemische Umsetzungen und Polarisationen auch bei der Benutzung als Detektor handele und folgert aus der Ähnlichkeit der Gleichstromcharakteristiken der übrigen Detektorkombinationen mit diesen zwei Paaren und mit der Charakteristik der elektrolytischen Zelle, daß bei allen untersuchten Detektoren die Gleichrichterwirkung ihre Ursache in einer elektrolytischen Polarisation innerhalb einer adhärierenden Feuchtigkeits- und Gasschicht findet. Diese Schicht muß nach seinen Versuchen freilich sehr schwer zerstörbar sein, denn es gelingt ihm nicht weder durch Hineinbringen des Detektors in ein gutes Vakuum noch durch Einbetten in Paraffinöl die Gleichrichterwirkung zu beeinflusssen.

Zu diesen Versuchen ist zu bemerken, daß diese in gewissen Fällen auftretenden chemischen Umsetzungen nicht eine allgemeine

1) F. Braun, Pogg. Ann. **153**, 556, 1874; Wied. Ann. **1**, 95, 1877; Wied. Ann. **4**, 476, 1878; W. A. **19**, 340, 1883.

1) R. Ettenreich, diese Zeitschr. **21**, 208, 1920.
2) Huizinga, diese Zeitschr. **21**, 91, 1920.

Erklärung bieten. Denn in sehr vielen Fällen, wo Kristalle in metallische Zuleitungen eingespannt sind und eine starke Unipolarität der Stromleitung zeigen, können viele Amperestunden hindurchgeleitet werden, ohne den geringsten — weder elektrisch noch chemisch, noch sonstwie nachweisbaren Effekt. So hat schon Braun argumentiert. Ebenso äußert sich auch Streintz[1]) der ebenfalls die elektrochemische Flüssigkeitshäutchentheorie ablehnend meint, ein Flüssigkeitshäutchen müßte bei solchen Dauerversuchen, wenn nicht sonst zerstört, zum mindesten durch die Stromwärme verdampft sein. Einer einfachen chemischen Polarisationstheorie der Gleichrichterwirkung widerspricht auch die Tatsache, daß keineswegs bei bestimmten Materialkombinationen die bevorzugte Stromrichtung stets die gleiche ist[2]). Ja, bei dem gleichen Kristall kann an nahe benachbarten Stellen die Vorzugsrichtung verschieden sein, ein Zeichen, daß feinste Oberflächenstrukturen wesentlich mitsprechen. Sehr lehrreich ist hierfür eine Beobachtung, die Braun[3]) aus der Fülle seiner Studien angibt. Schließlich ist noch zu sagen, sollten Polarisationserscheinungen als Folge chemischer Zersetzungen die Ursache der Gleichrichterwirkung sein, so müßte mit zunehmender Frequenz eine Abnahme der Detektorwirkung sich konstatieren lassen. Hiervon ist aber nach den Ettenreichschen Erfahrungen bisher nichts zu beobachten gewesen.

II.

In der zweiten Mitteilung (l. c.) spricht Braun von der Erklärungsmöglichkeit der anomalen Erscheinungen durch Luftschichten, welche den Stromübergang vermitteln. Er sieht aber Schwierigkeiten für diese Erklärung in folgenden Erfahrungen. 1. Metalle aufeinander gelegt, selbst bei Berührung mit sehr geringem Druck zeigen keine unipolare Leitung. 2. Manche Kristallproben zeigen gar keine Einseitigkeit. 3. Eingeschmolzene Elektroden in Bleiglanz und Selen zeigen Anomalie, wenn auch geringe. 4. Frische Splitter (Bleiglanz) zeigen sofort mit Nadel berührt Anomalie. 5. Wären Luftschichten der Grund, so müßten sie sich je nach dem Leitungsvermögen der Stoffe verschieden verhalten. Trotzdem heißt es im Schlußwort dieser zweiten Mitteilung: „Die Analogie der Erscheinungen mit denjenigen, welche Gase in ihrem Verhalten gegen den Strom bieten, ist so auffallend, daß es eines besonderen Hinweises nicht bedarf." Auch in der Arbeit aus dem Jahre 1878, wo Braun im Psilomelan zwischen Platinkontakten ein möglichst reproduzierbares Beobachtungsmaterial gefunden hat, heißt es: „Je mehr ich bis jetzt die Erscheinungen verfolgt habe, desto vollkommener hat sich auf Schritt und Tritt die Analogie zu dem Verhalten der Gase gezeigt." In letzter Zeit hat Streintz[1]) eingehende Studien über unipolare Leitung in Kristallen und damit verwandten Erscheinungen veröffentlicht. Auch er entwickelt die Anschauung, daß Gaskondensatoren von molekularen Dimensionen als wirksamer Bestandteil in den Übergangsschichten anzunehmen seien, ohne ein genaueres Bild des Mechanismus zu geben.

Vor einiger Zeit habe ich[2]) nun den sicheren Nachweis geführt, daß es einen Effekt gibt, den ich als Elektronenaustritt aus Metallen unter der Wirkung hoher Feldstärken bezeichnet habe. Bei Feldstärken, die nach meinen Messungen mehrere Millionen Volt pro cm betragen, werden Elektronen aus den Leitern herausgerissen und vermögen nichtleitende Schichten — Gase, Vakuum usw. — zu durchdringen. Die kritischen Austrittsspannungen hängen vom Material ab. Stehen sich zwei verschiedene, leitende Substanzen durch engen Zwischenraum getrennt, einander gegenüber, so ist die Möglichkeit unipolarer Leitung gegeben. Bei meinen Versuchen handelte es sich um sorgfältig polierte Metallflächen, die durch winzige exakt gemessene und konstant gehaltene Abstände getrennt waren. Das Verhältnis der Stromstärken in beiden Richtungen konnte unter Umständen bis zu 1 : 100 ansteigen.

Derartig starke Ventilwirkungen sind bei Detektoranorduungen ungewöhnlich. Da die beiden Körper zur Berührung gebracht werden, und zwar bei den technischen Detektoren mit gar nicht so geringen Drucken, so stellt der Stromdurchgang sich als ein kompliziert zusammengesetzter Summenvorgang dar. Es kann Stellen geben in der Berührungszone, wo ein unmittelbarer Kontakt eingetreten ist, die Elektrizität frei von einem Körper zum andern zirkuliert und jede Gleichrichterwirkung verschwunden ist. Erst wenn der hindurchgeleitete Strom verstärkt wird, reichen diese Übergangsstellen nicht aus, es werden mit steigender Potentialdifferenz Nachbarstellen zum

1) F. Streintz u. A. Wesely, diese Zeitschr. **21**, 42, 1920.
2) H. Meyer, Wied. Ann. **19**, 70, 1883.
3) F. Braun, Wied. Ann. **1**, **102**, unten, 1877.

1) F. Streintz u. A. Wesely, diese Zeitschr. **21**, 42, 316 u. 367, 1920; F. Streintz, diese Zeitschr. **22**, 263, 1921.
2) G. Hoffmann, Zeitschr. f. Phys. **4**, 463, 1921.

Stromübergang mit benutzt, nichtleitende Schichten durchschlagen, wobei, wenn die Körper verschieden sind, die notwendige Potentialdifferenz je nach der Stromrichtung differiert: Der Kontakt zeigt Gleichrichterwirkung. Diese Auffassung wird der Tatsache gerecht, daß bei jedem Kristallkontakt die Gleichrichterwirkung erst oberhalb einer gewissen Stromstärke eintritt.

Es haben nun meine Versuche weiter ergeben, daß die Feldstärke, die den Elektronenaustritt ermöglicht, nicht weit davon entfernt ist, wo auch materielle Veränderungen der obersten Leiterschicht auftreten. Es reißen sich feinste Teilchen los, bilden ein mikroskopisch feines Pulver, das sich unter dem Einfluß elektrostatischer Kräfte zu Brücken für den Strom durch die Übergangsschicht zusammenballt. Diese elektrisch-mechanischen Wirkungen erschweren die Messungen außerordentlich. Sie erklären die von allen Beobachtern von Detektoranordnungen geschilderte Launenhaftigkeit der Kontaktstelle (vgl. z. B. die Arbeiten von Streintz l. c.). Sie erklären auch, warum es bei einem losen Kontakt zwischen zwei verschiedenen Metallen keine Gleichrichterwirkung gibt, die Braun vergeblich suchte, weil Metallpulver eine zu gute Überleitung ohne Zwischenschicht bewirkt. Sorgt man für eine Trennungsschicht und beschränkt sich auf sehr kleine Elektrizitätsmengen, so zeigen auch die Metalle die Unipolarität. Ich habe in einem Falle beobachtet, daß eine Platin-Zinkstrecke für wenige Augenblicke sogar im Telephon hörbare Detektorwirkung ergab. Daß zahlreiche Kristallarten die Unipolarität selbst bei sehr fest anliegenden Kontakten zeigen, liegt entweder an geringer spezifischer Leitfähigkeit oder an besonders gearteter Oberflächenschicht. Bei sehr festem Druck und großer Berührungsfläche, daher kleiner Stromdichte hört stets die Unipolarität auf.

Die Deutung der Einseitigkeit der Stromleitung durch Elektronenaustritt läßt den Einfluß feinster Oberflächenstrukturen verständlich erscheinen. Offenbar ist die lokale Feldstärke maßgebend. So konnte ich (vgl. die oben zitierte Arbeit) beobachten, daß eine Trennstrecke zwischen glänzend poliertem und sehr fein mattiertem Metall Bevorzugung des Austritts negativer Elektrizität aus der mattierten Fläche ergab. Ähnlich wirken feinste Kristallsplitter. Schließlich ist es, wenn sich in der Kontaktschicht erst einmal feinste Körnchen gebildet haben, nicht verwunderlich, wenn die Gleichrichterwirkung erlischt, oder der Sinn der Richtungsbevorzugung sich umkehrt.

In der Arbeit von Streintz und Wesely (l. c.) wird der Satz von der Konstanz der Leistungspolarität aufgestellt, der sich auch in späteren Arbeiten der Verfasser bewährt hat. Hierunter ist folgendes verstanden. Bezeichnet J_1 den Strom in der Vorzugsrichtung, J_2 den Strom in der entgegengesetzten Richtung so ist die Unipolarität

$$U = \frac{J_1 - J_2}{J_1}$$

eine positive Größe kleiner als eins. Das Produkt der Unipolarität (U) mit der gesamten elektromotorischen Kraft des Stromkreises (V) wird als Leistungspolarität bezeichnet und soll in gewissen Grenzen konstant sein. Würden wir im Sinne der vorgestellten Anschauung die Unterschiede der Stromstärke in beiden Richtungen dadurch erklären, daß zur Überwindung einer konstanten Zwischenschicht in den beiden Richtungen die Potentialdifferenzen ε_1 und ε_2 erforderlich sind, und bezeichnet W den Gesamtwiderstand, so wäre:

$$J_1 = \frac{V - \varepsilon_1}{W}, \qquad J_2 = \frac{V - \varepsilon_2}{W}.$$

Unipolarität:

$$U = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{V - \varepsilon_1}.$$

Leistungspolarität:

$$VU = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{1 - \frac{\varepsilon_1}{V}}.$$

Soll die Leistungspolarität konstant sein, so müßte ε_1 klein gegen V sein. Da für V die untere Grenze von 2 Volt angegeben ist, so liegt das durchaus im Bereich des Möglichen. Aus der Differenz der ε-Werte und meinen Messungen über die Austrittsspannungen würde sich die Dicke der Zwischenschicht zu etwa 10^{-7} cm berechnen.

Die Möglichkeit der Veränderung der Strombasis läßt aber im allgemeinen für derartige Kontakte keine einfachen Beziehungen zwischen Strom und Spannung erwarten.

Sollte sich die Erscheinung des Elektronenaustrittes als Grundlage für die Betrachtung der unipolaren Leitung bewähren, so würde F. Braun mit seinem Hinweis auf die Analogie mit den Entladungserscheinungen in Gasen schon in seinen Arbeiten vor jetzt fast 50 Jahren einen sehr wesentlichen Fingerzeig gegeben haben. Für die Detektorwirkung würde sich praktisch Trägheitslosigkeit ergeben, was in Übereinstimmung mit den bisherigen Erfahrungen ist.

Königsberg, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 27. Juni 1921.)

Steigerung der sekundären Energie beim Funkeninduktor.

Von F. Dessauer.

(Mit Tafel II.)

Auf einem verhältnismäßig einfachen Weg kann man die Leistungsfähigkeit von Funkeninduktoren unter Umständen auf ein mehrfaches erhöhen oder unter Beibehaltung ihrer Leistung ihren Stromverbrauch erheblich erniedrigen und damit, insbesondere im Dauerbetrieb, die Unterbrecherabnützung sehr klein machen und Gleichmäßigkeit der Arbeit erzielen. Diese Möglichkeit besteht nicht nur beim Bau neuer Induktoren, sondern man kann auch alte Induktoren von geringer Leistungsfähigkeit auf diese Weise nachträglich bedeutend verbessern. Eine solche Verbesserung ist wichtig für gleichmäßige Versuchsbedingungen bei röntgenphysikalischen Arbeiten, wo der Wechselstromtransformator wegen seiner höheren Leistungsfähigkeit und seiner konstanten Arbeitsweise den Funkeninduktor zu verdrängen beginnt.

Die äußere Maßnahme besteht darin, daß man die freien Enden des Eisenkerns, der eventuell verlängert werden muß, verstärkt, bei vorhandenen Induktoren etwa durch Endstücke, wie sie Fig. 1 zeigt.

Diese Endstücke müssen aus gut geeignetem, sorgfältig unterteiltem Eisen hergestellt

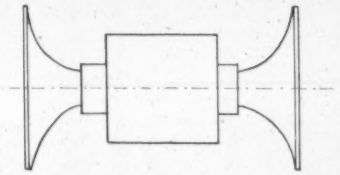


Fig. 1.

werden. Am bequemsten reiht man, wie Fig. 2 es zeigt, Querscheiben mit steigenden Durchmessern auf einer Unterlage auf. Selbstverständlich müssen diese Eisenblechscheiben geschlitzt werden.

Die Wirkung der Maßnahme geht aus Tabelle I hervor. Die Tabelle selbst bedarf keines Kommentars.

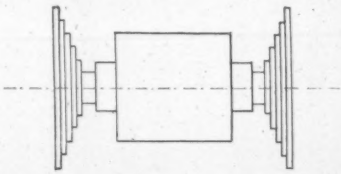


Fig. 2.

Tabelle I.

Induktor, betrieben mit Gasunterbrecher, über Vorschaltwiderstand an Gleichstromnetz angeschlossen.

Unterbrechungszahl konstant. Kontaktdauer immer dieselbe.
Belastung durch Funkenstrecke.
Zwei aufschiebbare Scheiben, bestehend aus je 5 Blechen 0,5 mm dick, 400 mm Durchmesser, viermal geschlitzt.

Einstellung auf gleiche primäre Stromstärke.

Netzspannung	Primärstrom	Primärspannung hinter dem Vorschaltwiderstand ohne Endscheiben	Primärspannung hinter dem Vorschaltwiderstand mit Endscheiben	Funkenstrecke zw. Spitzen	Sekundäre Stromstärke ohne Endscheiben	Sekundäre Stromstärke mit Endscheiben	Zunahme in Proz.
110 Volt	2,65 Amp.	48 Volt	55 Volt	100 mm	0,45 Milliamp.	1 Milliamp.	122
„	3 „	52 „	60 „	„	1 „	2,3 „	130
„	3,8 „	56 „	65 „	„	2 „	4,5 „	125
„	4,3 „	58 „	66 „	„	3 „	5 „	66
„	5,5 „	64 „	67 „	„	5 „	8 „	60
110 Volt	3,2 Amp.	52 Volt	62 Volt	150 mm	0,5 Milliamp.	1,5 Milliamp.	200
„	3,6 „	54 „	64 „	„	1 „	2,0 „	100
„	4,5 „	61 „	71 „	„	2 „	3,8 „	90
„	5,3 „	64 „	78 „	„	3 „	5,7 „	90
„	6,8 „	73 „	80 „	„	5 „	8,5 „	70
220 Volt	3,2 Amp.	81 Volt	91 Volt	100 mm	0,4 Milliamp.	1,8 Milliamp.	350
„	5,5 „	92 „	98 „	„	3,2 „	4,5 „	41
220 Volt	3,2 Amp.	82 Volt	90 Volt	150 mm	0,4 Milliamp.	1 Milliamp.	150
„	5,3 „	93 „	102 „	„	2,5 „	3,3 „	33

Der Bau derartiger Funkeninduktoren ist inzwischen auch von den Fabriken aufgenommen worden.

Die Begründung der Wirksamkeit führt in die Theorie des Induktoriums, die trotz sehr zahlreicher Arbeiten nicht in allen Punkten geklärt und noch viel weniger allgemein bekannt ist, selbst hinein. Es sei zunächst mitgeteilt, auf welchem gedanklichen Wege die Konstruktion erzielt wurde.

Der Funkeninduktor überträgt elektrische Energie aus der Primärspule in die Sekundärspule unter zweifacher Voraussetzung. Die erste davon ist, daß im Augenblick der Unterbrechung — man denke daran, daß der Sekundärstromfluß einsetzt, wenn primär kein Strom mehr nachgeliefert wird — Energie in dem System aufgespeichert ist, die übertragen werden kann. Diese Bedingung besteht ganz im Gegensatz zum Wechselstromtransformator, wo keine Energie aufgespeichert wird, sondern, weil Sekundär- und Primärstrom gleichzeitig fließen, das magnetische Feld die Rolle spielt, den Nachschub der primären Energie in dem Maße freizugeben, als Sekundärstrom entnommen wird.

Die zweite Voraussetzung für das Arbeiten des Funkeninduktoriums, d. h. für den Übergang des Hauptteils der Energie in die Sekundärspule ist die, daß die Energie nicht in einem enger als die Sekundärspule mit der Primärspule gekoppelten System abfließen kann. Nur bei einer hinreichend guten Unterbrechung, welche den Abfluß im Primärkreis verhindert, und einer guten Unterteilung des Sekundärkerns kann die aufgespeicherte Energie in die Sekundärspule ausreichend hinübergezwungen werden.

Die Form des übertragbaren Energievorrats im Augenblick der Unterbrechung ist

$$E_t = \frac{i^2}{2} \cdot L, \qquad (1)$$

wo E_t die aufgespeicherte Energie, i die momentane Stromstärke im Augenblick der Unterbrechung und L die gesamte Induktivität des primären Systems darstellt. L hat die Form:

$$L = 4\pi \frac{z^2}{R_m} \cdot 10^{-9} \text{ Henry}, \qquad (2)$$

wobei z die primäre Windungszahl und R_m den gesamten magnetischen Widerstand des magnetischen Kreises bedeutet.

Der magnetische Widerstand des Kreises setzt sich zusammen aus den Widerständen der beiden Wege, welche die Kraftlinien zurückzulegen haben. Bezeichnet man mit dem Index 1 den Eisenweg, mit dem Index 2 den Luftweg, so gilt für den Gesamtwiderstand

$$R_m = R_1 + R_2 = \sum \left(\frac{l_1}{q_1 \mu_1} + \frac{l_1'}{q_1' \mu_1} + \frac{l_1''}{q_1'' \mu_1} + \dots \right) + \frac{l_2}{q_2 \mu_2};$$

das erste Glied als Summe wegen der verschiedenen Querschnitte des Luftwegs. Unter ihnen sind alle q_1 sehr groß, bis auf die Stellen, wo die Kraftlinien aus dem Eisen in Luft übertreten. Man kann als erste Annäherung die gestrichenen Glieder weglassen und erhält:

$$R_m = R_1 + R_2 = \frac{l_1}{q_1 \mu_1} + \frac{l_2}{q_2 \mu_2}.$$

Setzt man statt R_m den reziproken Wert, die magnetische Leitfähigkeit λ, so ergibt sich

$$\Lambda = \frac{\mu_1 \mu_2 q_1 q_2}{\mu_2 l_1 q_2 + \mu_1 l_2 q_2}.$$

Weil nun μ_2 sehr klein ist gegen μ_1, kann man als erste Annäherung das erste Glied des Nenners vernachlässigen und es ergibt sich dann

$$\Lambda = \frac{\mu_2 q_2}{l_2}, \text{ worin } \mu_2 = 1 \text{ ist.} \qquad (3)$$

Für die magnetische Leitfähigkeit des Kreises und daher für die Induktivität und die übertragbare Energie spielt also das Verhältnis von Querschnitt und Länge des Luftwegs eine entscheidende Rolle. Die Wirkung der aufgesetzten Endstücke ist nun die, daß dieser Übertrittsquerschnitt stark vergrößert wird und damit auch die Induktivität erhöht. Diese Überlegung führte zum Bau solcher Induktorien. Daß aber die Überlegung nicht streng gilt, sondern nur als Annäherung, zeigen Versuche der Tabelle II, aus denen zu ersehen ist, daß die mit Hilfe von Wechselstrom ermittelte Induktivitätserhöhung nicht immer ausreicht, um die Leistungssteigerung zu erklären.

Man kann bei diesem Ergebnis an die alten Arbeiten von Lord Rayleigh denken (Phil. Mag. **22**, S. 175, 1886). Er zeigt dort, warum ein Funkeninduktor mit geschlossenem Eisenkern keine Leistung in die Sekundärspule liefert.

Die Magnetisierung eines nicht geschlossenen Eisenkerns bis zur maximalen Magnetisierung M durch ein Feld $\mathfrak{H}$ geht nach seiner Darstellung vor sich unter Überwindung der Wirkung des Entmagnetisierungsfaktors P. Der gesamte Energieverbrauch ist:

$$\int_0^M \mathfrak{H}_0 dM \text{ pro cm}^3. \qquad (4)$$

Tabelle II.

Messung von Widerstand und Induktivität des Primärkreises.

1. Widerstandsmessung mit Gleichstrom: 3,5 Volt 4,04 Amp. ergibt 0,865 Ω.
2. Induktivitätsmessung mit Wechselstrom von 45,3 Perioden sec.
2 Aufsatzscheiben aus je 5 Blechen 0,5 mm dick, 400 mm Durchmesser, viermal geschlitzt.

Spannung an der Primärspule		Strom	Scheinwiderstand $\frac{\text{Spannung}}{\text{Strom}}$		Induktivität L	
ohne Endscheiben	mit Endscheiben		ohne Endscheiben	mit Endscheiben	ohne Endscheiben	mit Endscheiben
31 Volt	53 Volt	2,0 Amp.	15,5 Ω	26,5 Ω	0,0546	0,0933 Henry
32,5 „	85 „	3,22 „	16,3 „	26,4 „	0,0575	0,0930 „
70 „	111 „	4,33 „	16,2 „	25,7 „	0,0570	0,0905 „

Mittelwert: $L = 0{,}0564$ Henry ohne Endscheiben
$L = 0{,}0923$ „ mit „
Zunahme der Induktivität um 64 Proz.

Im Innern des Eisenkerns wirkt die Feldstärke

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - M \cdot P.$$

Daraus ergibt sich, daß der Energieverbrauch pro Volumeneinheit sich zusammensetzt aus den beiden Gliedern:

$$\int_0^M \mathfrak{H} dM + {}^1/_2 P M^2. \qquad (5)$$

Von diesen beiden Gliedern ist das erste Glied Wärmeverlust, das zweite Glied, welches den Entmagnetisierungsfaktor enthält, kann allein wiedergewonnen werden. Dieser Entmagnetisierungsfaktor hängt aber ab von der Konfiguration des Eisenkörpers. Rayleigh hat ihn für den Fall eines langgestreckten Rotationsellipsoids berechnet. Dabei wächst er stark mit der Dicke und nimmt stark ab mit der Länge des Ellipsoids. Für einen geschlossenen Eisenkern wird der Entmagnetisierungsfaktor Null. Für einen Eisenkern, wie er hier verwendet wird, und den man vielleicht als Rotationskörper der Grenzflächen zwischen den Scheiteln zweier flacher Parabeln oder Hyperbeln bezeichnen kann, ist der Entmagnetisierungsfaktor vielleicht groß.

Um die Wirkung der Maßnahme zu übersehen, wurden Versuche durchgeführt mit verschiedenen aufgesetzten Endstücken — sowohl der Form wie der Größe nach — und mit verschiedenen Betriebsbedingungen des Induktoriums. Die Konstruktion eines wesentlich verbesserten Kathodenstrahlen-Oszillographen durch Herrn Dipl.-Ing. Brenzinger von meinem Institut, der in einer folgenden Arbeit beschrieben wird, ermöglichte die Wirkung sehr anschaulich an Oszillogrammen zu studieren und diese photographisch festzuhalten.

Die Erhöhung der Induktivität eines Induktoriums ändert das Verhältnis $\frac{R}{L}$ in dem Sinne, daß der Strom anstieg in der Primärspule, der nach der bekannten Helmholtzschen Gleichung

$$i = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \qquad (6)$$

mit wachsender Intensität immer langsamer erfolgt, sich immer mehr einer Geraden nähert. Würde R zu vernachlässigen sein, so würde der Anstieg statt exponentiell linear erfolgen. Läßt man die Kontaktdauer des Unterbrechers bei einem Induktorium bestehen, so wird bei einer geringeren primären Stromstärke unterbrochen, wenn die Endstücke aufgeschoben sind. Der verlangsamte Anstieg setzt dabei die elektromotorische Kraft der Schließungsinduktion stark herab. Die verringerte unterbrochene Stromstärke oder, wie man strenger dafür einsetzen müßte, der verringerte Endwert der Magnetisierung wird aber ausgeglichen, unter Umständen sogar weit mehr wie ausgeglichen durch den erhöhten Anteil an übertragbarer Energie. Die Kurven Fig. 3, 4 und 5 geben unter Beibehaltung der übrigen Verhältnisse den Anstieg mit und ohne die Endstücke wieder und zeigen das Gesagte deutlich. Die Kurven sind mit dem Braunschen Rohr nach der neuen Konstruktion, also einfach durch Photographieren der ruhig stehenden Kurve ohne rotierenden Spiegel gewonnen und beziehen sich auf ein gewöhnliches rechtwinkliges Koordinatensystem mit linearen Achsen.

Betreibt man das Induktorium mit vorgeschaltetem Regulierwiderstand, wie das allgemein üblich ist, so macht sich die Wirkung der Endstücke besonders deutlich folgender-

Tabelle III.

Induktor, betrieben mit Gasunterbrecher, ohne Vorschaltwiderstand an Akkumulatorenbatterie angeschlossen.

Unterbrechungszahl konstant. Kontaktdauer immer dieselbe.
Belastung durch Funkenstrecke.
Zwei aufschiebbare Scheiben, bestehend aus je 5 Blechen 0,5 mm dick, 400 mm Durchmesser, viermal geschlitzt.

Einstellung auf gleiche primäre Stromstärke.

Primärstrom	Primärspannung ohne Endscheiben	Primärspannung mit Endscheiben	Funkenstrecke zw. Spitzen	Sekundäre Stromstärke ohne Endscheiben	Sekundäre Stromstärke mit Endscheiben	Zunahme in Proz.
1,8 Amp.	18,7 Volt	31 Volt	60 mm	0,7 Milliamp.	2,2 Milliamp.	215
2,1 „	24,4 „	32 „	„	1,8 „	2,4 „	33
2,0 „	33,5 „	33 „	„	5,2 „	5 „	≈ 0
9,6 „	47 „	47 „	„	17 „	17 „	≈ 0
1,75 Amp.	18,7 Volt	36 Volt	100 mm	0,3 Milliamp.	0,6 Milliamp.	100
2,1 „	24,4 „	37 „	„	0,7 „	1,3 „	86
2,9 „	34 „	46 „	„	2,3 „	2,6 „	13
6 „	47 „	49 „	„	7 „	9 „	27
1,7 Amp.	18,8 Volt	30 Volt	150 mm	≈ 0 Milliamp.	≈ 0 Milliamp.	
2,28 „	24,4 „	41 „	„	0,4 „	1,1 „	175
2,9 „	34 „	50 „	„	1,2 „	2,4 „	100
4,2 „	48 „	61 „	„	3,7 „	4,7 „	27

Vergleich der maximalen Funkenlänge.

Primäre Spannung ohne Endscheiben	Primäre Spannung mit Endscheiben	Primärstrom	Maximale Funkenstrecke ohne Endscheiben	Maximale Funkenstrecke mit Endscheiben
18,8 Volt	30 Volt	1,7 Amp.	150 mm	180 mm
24,4 „	32 „	2,1 „	190 „	240 „
33,5 „	56 „	2,9 „	270 „	nicht mehr meßbar, da Überschläge am Induktor

maßen geltend: die primäre Endstromstärke geht nur wenig oder bei genügend langer Kontaktdauer gar nicht zurück (weil der Widerstand R gegenüber der Induktivität L groß bleibt), aber die sekundäre Leistung steigt bis auf das zwei- bis dreifache an. Wird das Induktorium ohne vorgeschalteten Widerstand einfach mit einer Batterie betrieben, so geht die primäre Stromstärke zurück, da in diesem Falle praktisch infolge der überwiegenden Induktivität des Stromkreises die dem Ohmschen Gesetz entsprechende Endstromstärke niemals erreicht wird. Man muß entweder die Kontaktdauer verlängern oder die primäre Spannung vergrößern, um dieselbe Endstromstärke und damit die erhöhte Leistung zu bekommen. Die Tabelle III gibt die zugehörigen Meßergebnisse.

Man sieht aus den letzten Werten der ersten Kolonne, daß bei sehr hohen sekundären Stromstärken keine Leistungssteigerung mehr auftrat. Das lag aber an der Versuchsanordnung, denn es ging dabei die Funkenentladung in das Lichtbogenstadium über. Dann aber genügt auch die kleinere elektromotorische Kraft der Schließung, um den Bogen aufrecht zu erhalten. Der Induktor arbeitet während des Stromanstiegs als Transformator, ein großer Teil der im Bogen sich entladenden Energie wird vom Primärkreis transformatorisch nachgeliefert. Die Tatsache, daß in diesem Stadium keine Steigerung der sekundären Energie auftritt, spricht demnach für die Richtigkeit der obigen Betrachtung.

Die Oszillogramme Fig. 6 zeigen den primären Stromverlauf für den Fall des sekundären Lichtbogens. Man sieht deutlich, wie der erste Teil des Stromanstiegs außerordentlich steil verläuft, ein Beweis, daß hier Schluß durch den Lichtbogen im Sekundärkreis be-

steht und Energie vom Primärkreis nachgeliefert wird. Läßt man diesen Lichtbogen nicht auftreten, so geht die Leistungssteigerung, bezogen auf gleiche primäre Stromstärke auch bei der maximalen Belastung des Induktors vor sich.

Endlich spielt bei der Verbesserung der Leistung auch die Erhöhung der Kopplung eine Rolle, die durch das Aufsetzen der Endscheiben bewirkt wird. Es steigt nicht nur der übertragbare Anteil der Energie, sondern auch der Wirkungsgrad wird etwas verbessert.

Sehr wichtig ist die Anwendung der Endstücke beim Einzelschlagverfahren. Man kann, wie der Verfasser gezeigt hat (diese Zeitschr. 13, 1101, 1912), mit einem einzigen Induktionsschlag die Mehrzahl der menschlichen Aufnahmen machen, wobei die Expositionszeit von der Größenordnung $^1/_{300}$ Sekunde ist. Die gleichfalls vom Verfasser durchgeführte Kinematographie des menschlichen Herzens und anderer physiologischer Bewegungen gründet sich darauf. Aber die Anwendung des Verfahrens war stark beschränkt durch die großen stoßweisen Stromentnahmen, der nicht alle Netzanschlüsse gewachsen sind. Déguisne hat die elektrischen und magnetischen Verhältnisse beim Einzelschlag genauer untersucht (diese Zeitschr. 15, 630, 1914). Es sind Versuche darüber im Gange, mit Hilfe der so geänderten Induktorien mit wesentlich verringerter Beanspruchung der Netze auszukommen.

Wir wiederholten die Versuche mit einem sehr großen, für Dauerbetrieb bestimmten Funkeninduktorium von Reiniger, Gebbert & Schall mit Gasunterbrecher mit dem gleichen Ergebnis.

Für den gewöhnlichen Betrieb ergibt sich eine Reduktion der elektromotorischen Kraft der Schließungsinduktion, eine erheblich geringere Beanspruchung von Netz, Unterbrecher und Induktor durch die primäre Stromstärke und bezogen auf gleiche Stromstärke, eine bedeutende Leistungssteigerung des Funkeninduktors bis auf das zwei- und dreifache.

Die Versuche mit dem neuen Induktorium sind überwiegend von meinem Mitarbeiter Herrn Dipl.-Ing. Brenzinger ausgeführt worden.

Frankfurt a. M., Institut für physikalische Grundlagen der Medizin.

(Eingegangen 23. Juni 1921.)

Die Energieverteilung im kontinuierlichen Röntgenspektrum.

Von A. March.

In einem vor kurzem in dieser Zeitschrift veröffentlichten Aufsatz[1]) hat der Verfasser den Umriß einer Theorie des Röntgenbremsspektrums entworfen und ist dabei zu einem Strahlungsgesetz gelangt, das, wie gezeigt werden konnte[2]), mit der Erfahrung annähernd im Einklang steht. Leider ist die Zahl der experimentellen Untersuchungen noch viel zu gering, um eine genauere Prüfung der Theorie zu ermöglichen. Es wäre, insbesondere im Hinblick auf die praktische Verwendung der Röntgenstrahlen in der Medizin, von größter Wichtigkeit, wenn die Intensitätsverteilung im Röntgenspektrum der Gegenstand möglichst zahlreicher und eingehender Untersuchungen würde. Alle Theorie bleibt notwendig unfruchtbar, wenn die Möglichkeit fehlt, sie mit der Erfahrung zu vergleichen. Wenn die folgende Arbeit auch nur geeignet sein sollte, den einen oder anderen Experimentator anzuregen, sich mit den hier behandelten Problemen zu befassen, so hätte sie schon einigen Nutzen. Was bisher an experimentellen Ergebnissen feststeht, ist im wesentlichen das folgende. Bedeutet $K_\lambda d\lambda$ die pro Sekunde im Wellenlängenbereich von λ bis $\lambda + d\lambda$ von der Röhre ausgestrahlte Energie, so gilt für den Fall, daß die Röhre mit einer konstanten Spannung V betrieben wird, daß

$$K_\lambda = C \cdot i \cdot f(\lambda, \lambda_0). \qquad (1)$$

Dabei bedeutet C eine vom Stoff der Antikathode abhängige Konstante, i die Röhrenstromstärke und $f(\lambda, \lambda_0)$ eine universelle Funktion von λ, in die ausschließlich die kürzeste Wellenlänge λ_0 als Parameter eingeht. λ_0 bestimmt sich aus der Spannung V nach der Einsteinschen Beziehung

$$h\frac{c}{\lambda_0} = e \cdot V. \qquad (2)$$

Über die Konstante C ist nur wenig bekannt; sie scheint annähernd proportional der Ordnungszahl Z des Antikathodenmetalles anzusteigen. Wesentlich ist die universelle Natur der Funktion $f(\lambda, \lambda_0)$; diese Darstellbarkeit besagt, daß die Energieverteilung im kontinuierlichen Röntgenspektrum eindeutig definiert wird durch die kürzeste in der Strahlung enthaltene Wellenlänge λ_0; das Metall der Antikathode sowie die Röhrenstromstärke i bestimmen lediglich den Betrag der ausgestrahlten Energie, ohne auf die spektrale Verteilung derselben irgend-

1) Diese Zeitschr. **22**, 209, 1921.
2) A. March, Ann. d. Phys. **65**, 449, 1921.

einen Einfluß zu nehmen. Diese aus den Untersuchungen von Ulrey, Wagner, Lilienfeld u. a. fließende Erkenntnis ist deshalb von wesentlicher Bedeutung, weil durch sie die praktische Ermittlung der Energieverteilung, wenn einmal die Funktion $f(\lambda, \lambda_0)$ bekannt ist, auf die Bestimmung einer einzigen Größe, der Minimumwellenlänge λ_0, zurückgeführt wird. Um diese Größe auch in medizinischen Röntgeninstituten, wo es an Zeit und Übung für umständlichere Untersuchungen fehlt, bequem feststellen zu können, hat der Verfasser schon vor einiger Zeit zusammen mit Staunig und Fritz ein vereinfachtes Braggsches Spektrometer konstruiert, das λ_0 auf 0,01 Angströmeinheiten genau unmittelbar abzulesen gestattet und sich im praktischen Betrieb sehr bewährt hat.

Was das Maximum der Funktion K_λ sowie den Betrag der gesamten Intensität $\int K_\lambda d\lambda$ betrifft, so geht aus den von Ulrey[1]) an einer Coolidgeröhre vorgenommenen Messungen folgendes hervor. Die maximale Intensität gehört zu einer Wellenlänge λ_m, die sich mit der Spannung V wie $V^{-1/2}$ ändert; von Antikathode und Stromstärke ist λ_m, wie übrigens schon aus dem Ansatz (1) hervorgeht, weitgehend unabhängig. Die Gesamtintensität S fand Ulrey in Übereinstimmung mit älteren Untersuchungen annähernd proportional zu V^2. Beide Ergebnisse sind aber nur mit Vorsicht zu verwerten, weil die Messungen Ulreys sich auf eine durch das Glas der Röhre gefilterte Strahlung beziehen. Durch die Filterung wird aber sowohl die Lage des Maximums als auch der Betrag der gesamten Intensität in einem je nach der kürzesten Wellenlänge λ_0 verschiedenem Grade geändert. Das Maximum der Strahlungsintensität wird nach der Seite der kurzen Wellenlängen verlagert, und zwar ist die Verlagerung um so bedeutender, je langwelliger das Maximum ist[2]). Das an der gefilterten Strahlung festgestellte Gesetz $\lambda_m V^{1/2} = \text{const.}$ kann daher für die unmittelbar von der Antikathode ausgehende Strahlung nur in grober Annäherung gelten. Ebenso wie die Verlagerung des Maximums hängt auch die durch das Filter bewirkte relative Schwächung der Gesamtintensität S von der Größe λ_0 ab. Da nämlich das Filter die langen Wellen stärker als die kurzen absorbiert, so wird S um so mehr geschwächt, je weniger harte Komponenten in der Strahlung enthalten sind, d. h. aber, je größer λ_0 ist. Wenn daher Ulrey S proportional zu V^2 findet, so ist anzunehmen, daß für die ungefilterte Strahlung S langsamer als V^2 wächst.

1) C. T. Ulrey, Phys. Rev. 11, 401, 1918.
2) Vgl. A. March, Ann. d. Phys. 65, 449, 1921.

Die Wirkung einer periodisch veränderlichen Spannung auf die Intensitätsverteilung haben Hull und Behnken[1]) untersucht. Sie fanden an Coolidgeröhren, daß die Verteilung bei einer Scheitelspannung V_{max} sich nur unbeträchtlich vom Falle einer konstanten Spannung V_{max} unterschied. Dieses Ergebnis erklärt sich, wie der Verfasser gezeigt hat, daraus, daß die Intensität der Strahlung mit sinkender Spannung rasch abnimmt, sodaß die kleinen Spannungswerte gegenüber den großen nur wenig zur Geltung kommen. Immerhin ist vorauszusehen, daß bei Betrieb mit wechselnder Spannung eine etwas weichere Strahlung als im Falle einer konstanten Spannung zustande kommen muß. Außerdem versteht sich, daß der Gesamtbetrag der pro Sekunde ausgestrahlten Energie je nach der besonderen Art der Spannungskurve sehr verschieden sein kann.

Die theoretische Ermittlung der Funktion $f(\lambda, \lambda_0)$ hat der Verfasser in den bereits erwähnten Arbeiten in Angriff genommen. Wenn wir die dort angestellten Betrachtungen im folgenden neuerdings aufnehmen, so geschieht dies deshalb, weil eine eingehendere Überlegung ergab, daß die früheren Rechnungen in mehrfacher Hinsicht der Verbesserung und Erweiterung bedürfen. Fürs erste waren im Ansatz für die Entropie des von einem Elektron getroffenen Atomsystems die Elementargebiete der Wahrscheinlichkeit nicht korrekt gewählt. Sodann wurde λ_m nach Ulrey proportional zu $V^{-1/2}$ angenommen, was nach dem oben Gesagten nicht statthaft ist. Vor allem aber soll im folgenden jener, in den beiden ersten Arbeiten nicht berücksichtigten, von Wagner genauer untersuchten Erscheinung Rechnung getragen werden, die man allgemein als einen Dopplereffekt der Röntgenstrahlen aufzufassen pflegt und darin besteht, daß die mittlere Härte der Strahlung je nach dem Winkel zwischen Kathoden- und Röntgenstrahl verschieden ist. Die elementare Erklärung dieser von W. Wien aus rein kinematischen Betrachtungen abgeleiteten Erscheinung ist bekannt. Die Exzentrizität der vom Elektron während der Bremsung ausgehenden Wellenflächen soll bewirken, daß die Impulsbreite der Strahlung in der Richtung des Kathodenstrahles den kleinsten, in der entgegengesetzten den größten Wert hat. Es kann kein Zweifel sein, daß diese Erklärung nicht zutrifft. Stellt man sich auf den Boden der Quantentheorie, so kann die Auffassung, die man sich von der Entstehung der Röntgenstrahlen zu bilden hat, nur die folgende sein: setzt sich die Bewegungsenergie eines Elektrons

1) H. Behnken, Zeitschr. f. Phys. 3, 48, 1920.

in Strahlung um, so entsteht für ein Bezugssystem, von dem aus beurteilt die umgesetzte Energie den Betrag E hat, Licht von der Schwingungszahl $\nu = \frac{E}{h}$. Darnach kann es zu einem Dopplereffekt nur dann kommen, wenn der Vorgang von verschieden bewegten Systemen aus beurteilt wird, weil von jedem dieser Systeme aus die umgesetzte Energie und damit auch die Schwingungszahl anders gemessen wird. Der in Rede stehenden Erscheinung kann also keineswegs ein Dopplereffekt zugrunde liegen und in der Tat hat Wagner[1]) gezeigt, daß die Minimumwellenlänge λ_0 von der Richtung des Strahles unabhängig ist; lediglich die Energieverteilung ist nach verschiedenen Richtungen verschieden, indem die Intensität der transversal zum Kathodenstrahl gerichteten Strahlung im kurzwelligen Teil des Spektrums größer ist als die der rückläufigen Strahlung, während sich in den großen Wellenlängen die Intensitäten nur wenig voneinander unterscheiden. Schon Wagner weist auf die richtige Erklärung dieser Erscheinung hin; sie ist, wie sich zeigen wird, im Satz von der Erhaltung des Impulses zu suchen.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen gehen wir nun daran, eine Theorie des Röntgenbremsspektrums zu entwickeln. Wir nehmen wie früher an, daß ein auf die Antikathode prallendes Elektron seine Energie $E_0 = eV$ in N Zusammenstößen verliert. Unter Zusammenstößen ist gemeint, daß das auftreffende Elektron so nahe an einem Elektron oder, was viel seltener eintreten wird, am Kern eines der Metallatome vorbeifliegt, daß es eine genügend starke elektrostatische Einwirkung erfährt, um auf das getroffene Elektron (von den getroffenen Atomkernen wollen wir absehen) eine gewisse Energie $\frac{mv^2}{2} \leq E_0$ zu übertragen. Wir charakterisieren die übertragene Bewegung durch deren Geschwindigkeitskomponenten $\dot{x}\ \dot{y}\ \dot{z}$ und schreiben die Zahl derjenigen Elektronen, deren Geschwindigkeitspunkt in das Element $d\dot{x}\,d\dot{y}\,d\dot{z}$ des Geschwindigkeitsraumes fällt, an zu $Nw\,d\dot{x}\,d\dot{y}\,d\dot{z}$. Die x-Achse denken wir uns dabei in die Richtung des Kathodenstrahles gelegt. Die Verteilungsdichte w ist als Funktion der Geschwindigkeit $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ sowie des Winkels Θ, den x-Achse und Geschwindigkeit miteinander einschließen, zu ermitteln. Da die Zahl der Elektronen mit einer Geschwindigkeit zwischen v und $v + dv$ und einer Geschwindigkeitsrichtung zwischen Θ und $\Theta + d\Theta$ gegeben ist durch $2\pi v^2 w \sin\Theta\, d\Theta\, dv$, so gilt zunächst:

$$2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi v^2 w \sin\Theta\, d\Theta\, dv = 1. \qquad (3)$$

Als obere Grenze für v wäre streng genommen die größtmögliche Geschwindigkeit $v_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{m}}$ einzusetzen; da aber w mit wachsendem v rasch abnimmt, so kann statt mit v_0 unbedenklich mit der Grenze unendlich gerechnet werden. Weiter ist, da die gesamte Energie der N getroffenen Elektronen aus der des auftreffenden Kathodenstrahlteilchens stammt:

$$2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi m \frac{v^2}{2} v^2 w \sin\Theta\, d\Theta\, dv = \frac{E_0}{N}. \qquad (4)$$

Schließlich fordert der Impulssatz, daß der Impuls $mv_0 = \sqrt{2E_0 m}$ des stoßenden Elektrons sich in der Bewegung der getroffenen Elektronen wiederfindet. Da der Impuls die Richtung der x-Achse hat, so muß also sein:

$$2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi mv \cos\Theta v^2 w \sin\Theta\, d\Theta\, dv = \frac{\sqrt{2E_0 m}}{N}. \qquad (5)$$

Aus (3), (4) und (5) folgt, daß die Entropie S, die, von hier belanglosen Konstanten abgesehen, gegeben ist durch das Integral

$$\int_0^\infty \int_0^\pi v^2 w \log w \sin\Theta\, d\Theta\, dv,$$

ein Maximum wird, wenn

$$\log w + \alpha v^2 + \beta v \cos\Theta + \gamma = 0$$

oder

$$w = a e^{-\alpha v^2 - \beta v \cos\Theta}. \qquad (6)$$

Die Konstanten a, α und β bestimmen sich aus den Gleichungen (3), (4) und (5). Aus (3) folgt:

$$2\pi a \int_0^\infty v^2 e^{-\alpha v^2} dv \int_0^\pi e^{-\beta v \cos\Theta} \sin\Theta\, d\Theta = 1.$$

Wir entwickeln hier $e^{-\beta v \cos\Theta}$ bis auf das Glied erster Ordnung. Der Fehler, den wir durch diese Entwicklung für große Werte von v machen, wird durch das Glied $e^{-\alpha v^2}$, das mit wachsendem v rasch auf Null sinkt, gedeckt. Wir erhalten

$$2\pi a \int_0^\infty v^2 e^{-\alpha v^2} dv \int_0^\pi (1 - \beta v \cos\Theta) \sin\Theta\, d\Theta = 4\pi a \frac{\pi^{1/2}}{4\alpha^{3/2}} = a \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{3/2} = 1. \qquad (7)$$

[1]) E. Wagner, diese Zeitschr. **21**, 921, 1920.

Weiter ergibt die Gleichung (4):

$$2\pi a \frac{m}{2} \int_0^\infty v^4 e^{-\alpha v^2} dv \int_0^\pi (1 - \beta v \cos\Theta) \sin\Theta d\Theta = a m \frac{3\pi^{3/2}}{4\alpha^{5/2}} = \frac{E_0}{N}. \quad (8)$$

Schließlich folgt aus (5):

$$2\pi a m \int_0^\infty v^3 e^{-\alpha v^2} dv \int_0^\pi (1 - \beta v \cos\Theta) \sin\Theta \cos\Theta d\Theta = -2\pi a m \int_0^\infty v^3 e^{-\alpha v^2} dv \cdot \beta \cdot v \frac{2}{3} \quad (9)$$

$$= -\frac{1}{2} a m \beta \frac{\pi^{3/2}}{\alpha^{5/2}} = \frac{\sqrt{2 E_0 m}}{N}.$$

Aus (7), (8) und (9) ergeben sich für die Konstanten a, α und β die Werte:

$$a = \left(\frac{3m}{4\pi}\right)^{3/2} \left(\frac{N}{E_0}\right)^{3/2}, \quad \alpha = \frac{3}{4} m \frac{N}{E_0},$$

$$\beta = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2m}{E_0}}. \quad (10)$$

Damit wird die Verteilungsdichte w, wenn wir $\frac{m v^2}{2} = E$ setzen:

$$w = \text{const.} \left(\frac{N}{E_0}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{3}{2}\frac{NE}{E_0}} \cdot e^{\sqrt[3]{\frac{E}{E_0}}\cos\Theta}, \quad (11)$$

woraus für die Zahl der Elektronen, die eine Geschwindigkeit zwischen v und $v + dv$ in einer Richtung zwischen Θ und $\Theta + d\Theta$ erhalten, der Ausdruck folgt:

$$2\pi \text{ const.} \left(\frac{N}{E_0}\right)^{3/2} \cdot N \cdot e^{-\frac{3}{2}\frac{NE}{E_0}} \cdot e^{\sqrt[3]{\frac{E}{E_0}}\cos\Theta} v^2 \sin\Theta d\Theta dv$$

oder, wenn wir $\frac{m v^2}{2} = E$, $m v dv = dE$ einführen:

$$2\pi \text{ const.} \frac{N^{3/2}}{E_0^{3/2}} e^{-\frac{3}{2}\frac{NE}{E_0}} e^{\sqrt[3]{\frac{E}{E_0}}\cos\Theta} \cdot \sqrt{E} \sin\Theta d\Theta dE. \quad (12)$$

Diesen Ausdruck benutzen wir nun, um die von den getroffenen Elektronen ausgesandte Strahlung zu berechnen. Die Annahmen, von denen wir dabei ausgehen wollen, sollen im wesentlichen dieselben sein, die bereits der ersten Mitteilung zugrunde gelegt wurden, nämlich: 1. ein Elektron strahlt, wenn es überhaupt die beim Zusammenstoß aufgenommene Energie E in Strahlung umsetzt (der Umsatz tritt, wie aus dem geringen Nutzeffekt der Röntgenstrahlenerzeugung hervorgeht, nur relativ selten ein), stets die ganze Energie E aus, und zwar monochromatisch in der Schwingungszahl $\nu = \frac{E}{h}$. Diese Annahme steht in Einklang mit der Tatsache einer größten Schwingungszahl ν_0, die dann zustande kommt, wenn das Kathodenstrahlteilchen seine ganze Energie $E_0 = eV$ in einem winzigen Zusammenstoß verliert. 2. Die Wahrscheinlichkeit der Ausstrahlung soll vom Betrag der auszustrahlenden Energie E, also wegen $E = h\nu$ von der Schwingungszahl ν abhängen. Wir wollen die besondere Art der Abhängigkeit vorläufig unbestimmt lassen und nur annehmen, daß die Wahrscheinlichkeit einer Ausstrahlung proportional zu ν^n sei, d. h. daß von Z Elektronen, die zur Schwingungszahl ν gehören, der Bruchteil $kZ\nu^n$ die Energie in Strahlung umsetzt, wobei k eine von ν unabhängige Konstante bedeutet. In der ersten Theorie wurde $n = 2$ gesetzt; diese spezielle Annahme lassen wir hier fallen, um den wahrscheinlichen Wert von n später aus dem Vergleich mit der Erfahrung abzuleiten.

Auf Grund der Annahmen 1 und 2 berechnet sich nun die von der Antikathode ausgehende Strahlung folgendermaßen. Ist i die Stromstärke, so erhalten durch die $\frac{i}{e}$ Elektronen, die in der Sekunde die Antikathode treffen, nach (12) eine Zahl von

$$Z = 2\pi \text{ const.} \, i \frac{N^{3/2}}{E_0^{3/2}} e^{-\frac{3}{2}\frac{NE}{E_0}} \cdot e^{\sqrt[3]{\frac{E}{E_0}}\cos\Theta} \sqrt{E} \sin\Theta d\Theta dE \quad (13)$$

Metallelektronen eine Bewegung von einer Energie zwischen E und $E + dE$ und einer Richtung zwischen Θ und $\Theta + d\Theta$. Die von diesen Z Elektronen ausgestrahlte Energie ist $kZ\nu^n E$ oder, wenn wir $E = h\nu$ setzen:

$$2\pi \text{ const.} \, i \frac{N^{3/2}}{\nu_0^{3/2}} e^{-\frac{3}{2}\frac{N\nu}{\nu_0}} e^{\sqrt[3]{\frac{\nu}{\nu_0}}\cos\Theta} \nu^{n+3/2} \sin\Theta d\Theta d\nu. \quad (14)$$

Dieser Ausdruck gibt die Strahlung an, die im Intervall von ν bis $\nu + d\nu$ von der Antikathode $\sec^{-1}$ ausgesandt wird und deren Impuls eine Richtung zwischen Θ und $\Theta + d\Theta$ hat. Daß wir hier auf den Impuls, den die Strahlung von den auftreffenden Elektronen übernimmt, Rücksicht nehmen, ist wesentlich, weil es gerade die Tatsache dieses Impulses ist, die den erwähnten Einfluß der Richtung auf die Härte der Röntgenstrahlung erklärt. Vor allem ist klar, daß die Energie (14), weil der entsprechende Strahlungsimpuls in der Richtung Θ liegt, nicht gleich-

mäßig nach allen Richtungen hin ausgestrahlt wird, sondern die Richtung Θ bevorzugen muß. Das Gesetz, nach welchem sich eine Strahlung von gegebenem Impuls über die einzelnen Richtungen verteilt, hat Sommerfeld angegeben. Wird die Strahlung durch ein gleichförmig verzögertes Elektron erregt, so ist die Energie $\mathfrak{S}$, die unter dem Winkel $\mathfrak{D}$ gegen die Kathodenstrahlrichtung emittiert wird, nach Sommerfeld gegeben durch

$$\mathfrak{S} = \frac{e^2 \dot{v}}{16 \pi c^2} \frac{\sin^2 \mathfrak{D}}{\cos \mathfrak{D}} \left(\frac{1}{(1 - \beta \cos \mathfrak{D})^4} - 1 \right); \quad (15)$$

es bedeutet hier $\dot{v}$ die Verzögerung und β die durch c geteilte Anfangsgeschwindigkeit des gebremsten Elektrons. $\mathfrak{S}$ ist die Energie, welche durch die in der Emissionsrichtung $\mathfrak{D}$ gelegte Flächeneinheit der Einheitskugel hindurchtritt. Die gesamte ausgestrahlte Energie berechnet sich aus (15) zu

$$2\pi \int_0^\pi \mathfrak{S} \sin \mathfrak{D} \, d\mathfrak{D}$$

$$= \frac{e^2 \dot{v}}{8 c^2} \int_0^\pi \sin^3 \mathfrak{D} \cdot \beta (4 + 10 \beta \cos \mathfrak{D}) \, d\mathfrak{D} = \frac{e^2 \dot{v}}{c^2} \frac{2\beta}{3}.$$

Setzen wir diese Energie gleich E, so erhalten wir für $\mathfrak{S}$ statt des Ausdrucks (15):

$$\mathfrak{S} = \frac{3E}{32\pi\beta} \frac{\sin^2 \mathfrak{D}}{\cos \mathfrak{D}} \left(\frac{1}{(1 - \beta \cos \mathfrak{D})^4} - 1 \right)$$

$$= \frac{3E}{8\pi} \sin^2 \mathfrak{D} \left(1 + \frac{5}{2} \beta \cos \mathfrak{D} \right). \quad (16)$$

Diese Beziehung drückt das Gesetz aus, nach welchem ein in der Richtung $\mathfrak{D} = 0$ gebremstes Elektron die Gesamtenergie E in den Raum hinausstrahlt. Wir halten es nicht für bedenklich, die Gleichung (16), trotzdem sie auf den Voraussetzungen der klassischen Theorie beruht, auch dann anzuwenden, wenn die Ausstrahlung nach den Gesetzen der Quantentheorie vor sich geht, indem wir $E = h\nu$ setzen und für $\beta = \frac{v}{c}$ wegen $\frac{mv^2}{2} = h\nu$ den Wert $\frac{1}{c}\sqrt{\frac{2h\nu}{m}}$ einführen. Es bezieht sich dann (16) auf den Fall eines Elektrons, das vor der Ausstrahlung eine Geschwindigkeit v in der Richtung $\mathfrak{D} = 0$ hat und seine kinetische Energie E in Strahlung von der Schwingungszahl $\nu = \frac{E}{h}$ umsetzt. Führen wir für E den Ausdruck (14) ein, so erhalten wir die Strahlung $\mathfrak{S}_\mathfrak{D}$, die von den Z Elektronen der Gleichung (13) in der Richtung $\mathfrak{D}$ emittiert wird; es ergibt sich:

$$\mathfrak{S}_\mathfrak{D} = \text{const.}\; i \frac{N^{3/2}}{\nu_0^{3/2}} e^{-\frac{3N\nu}{2\nu_0}} e^{3\sqrt{\frac{\nu}{\nu_0}} \cos \Theta} \cdot \nu^{\nu + 3/2} \cdot 2\pi \sin \Theta \, d\Theta \, d\nu \sin^2 \mathfrak{D} \left(1 + \frac{5}{2} \sqrt{\frac{2h\nu}{mc^2}} \cos \mathfrak{D} \right). \quad (17)$$

Darin bedeutet Θ den Winkel zwischen Kathodenstrahl und Impuls der strahlenden Elektronen, $\mathfrak{D}$ den zwischen Impuls und der betrachteten Emissionsrichtung. Lassen wir $\mathfrak{D}$ und Θ zusammenfallen, so erhalten wir die durch die Elektronen (13) in der Kathodenstrahlrichtung erzeugte Strahlung und durch Integration über Θ die gesamte in der genannten Richtung emittierte Strahlung des Intervalls von ν bis $\nu + d\nu$. Wir finden dafür:

$$\mathfrak{S}_{0^\circ} \, d\nu = \text{const.}\; i \frac{N^{3/2}}{\nu_0^{3/2}} e^{-\frac{3N\nu}{2\nu_0}} \cdot \nu^{\nu + 3/2} \, d\nu \, 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \Theta \, d\Theta \left(1 + 3\sqrt{\frac{\nu}{\nu_0}} \cos \Theta \right) \left(1 + \frac{5}{2} \sqrt{\frac{2h\nu}{mc^2}} \cos \Theta \right).$$

Die Ausführung des Integrals ergibt

$$\frac{4}{3} + 2\nu \sqrt{\frac{2h}{mc^2 \nu_0}},$$

sodaß

$$\mathfrak{S}_{0^\circ} \, d\nu = \text{const.}\; i \frac{N^{3/2}}{\nu_0^{3/2}} e^{-\frac{3N\nu}{2\nu_0}} \nu^{\nu + 3/2} \, d\nu \, \frac{8\pi}{3} \left(1 + \frac{3}{2} \nu \sqrt{\frac{2h}{mc^2 \nu_0}} \right) \quad (18a)$$

wird. Entsprechend finden wir für die entgegengesetzt zur Kathodenstrahlrichtung ausgestrahlte Energie, indem wir in (17) $\mathfrak{D} = 180 - \Theta$ setzen:

$$\mathfrak{S}_{180^\circ} \, d\nu = \text{const.}\; i \frac{N^{3/2}}{\nu_0^{3/2}} e^{-\frac{3N\nu}{2\nu_0}} \nu^{\nu + 3/2} \, d\nu \, \frac{8\pi}{3} \left(1 - \frac{3}{2} \nu \sqrt{\frac{2h}{mc^2 \nu_0}} \right). \quad (18b)$$

Schließlich berechnen wir noch die Strahlung, die senkrecht zur Kathodenstrahlrichtung emittiert wird. Führen wir dazu (vgl. Fig. 1) den Azimutalwinkel φ ein, so wird $\cos \mathfrak{D} = \sin \Theta \cos \varphi$, sodaß wir aus (17) erhalten:

$$\mathfrak{E}_{\vartheta^0}\,d\nu = \text{const.}\; i\,\frac{N^{n+1/2}}{\nu_0^{n+1/2}}\,e^{-\frac{3N\nu}{2\nu_0}}$$

$$\cdot\,\nu^{n+1/2}\,d\nu \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\Theta=0}^{\pi} d\varphi\,\sin\Theta\,d\Theta\left(1+3\sqrt{\frac{\nu}{\nu_0}}\cos\Theta\right)(1-\sin^2\Theta\cos^2\varphi)\left(1+\frac{5}{2}\sqrt{\frac{2h\nu}{mc^2}}\sin\Theta\cos\varphi\right).$$

Das Integral dieses Ausdruckes reduziert sich auf

$$\int\int d\varphi\,d\Theta\,\sin\Theta\,(1-\tfrac{1}{3}\sin^2\Theta)$$

$$= 4\pi - \frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{3},$$

sodaß wir für $\mathfrak{E}_{\vartheta^0}$ erhalten:

$$\mathfrak{E}_{\vartheta^0}\,d\nu = \text{const.}\; i\,\frac{N^{n+1/2}}{\nu_0^{n+1/2}}\,e^{-\frac{3N\nu}{2\nu_0}}\,\nu^{n+1/2}\,d\nu\,\frac{8\pi}{3}. \quad (18\,c)$$

Da in den Messungen die Strahlungsintensität nicht auf die Schwingungszahl ν, sondern die Wellenlänge λ bezogen wird, so wollen wir in den Gleichungen (18) ν durch λ ersetzen. Wegen $\nu = \frac{c}{\lambda}$ und $d\nu = -\frac{c\,d\lambda}{\lambda^2}$ wird, wenn wir jetzt die Konstante mit C bezeichnen:

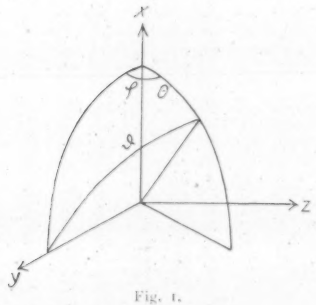


Fig. 1.

$$\mathfrak{E}_{0^0,\,180^0}\,d\lambda = C i N^{n+1/2}\lambda_0^{n+1/2}\,e^{-\frac{3N\lambda_0}{2\lambda}}\,\frac{1}{\lambda^{n+7/2}}\,d\lambda\left(1+\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2h\lambda_0}{mc}}\right)$$

$$\mathfrak{E}_{90^0}\,d\lambda = C i N^{n+1/2}\lambda_0^{n+1/2}\,e^{-\frac{3N\lambda_0}{2\lambda}}\,\frac{1}{\lambda^{n+7/2}}\,d\lambda. \quad (19)$$

Um daraus zunächst die Wellenlänge λ_m der maximalen Intensität zu berechnen, setzen wir zur Abkürzung $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2h\lambda^0}{mc}} = k$ und erhalten durch Differenzieren der Funktionen $\mathfrak{E}_{0^0}$ und $\mathfrak{E}_{180^0}$:

$$\frac{3N\lambda_0}{2\lambda^2}\left(\frac{1}{\lambda^{n+7/2}}+\frac{k}{\lambda^{n+7/2}}\right) -$$

$$-\left(\frac{n+7/2}{\lambda^{n+9/2}}+\frac{k\,(n+9/2)}{\lambda^{n+11/2}}\right)=0$$

oder

$$\lambda^2 - \lambda\,\frac{3/2 N\lambda_0 + k(n+9/2)}{n+7/2} + \frac{3/2 N\lambda_0 k}{n+7/2} = 0,$$

woraus für λ_m folgt:

$$\lambda_m = \frac{3/2 N\lambda_0 + k(n+9/2)}{2n+7}$$

$$+\sqrt{\frac{[3/2 N\lambda_0 + k(n+9/2)]^2 + 3N\lambda_0 k(2n+7)}{(2n+7)^2}}.$$

Wegen der Kleinheit von k können wir in der Wurzel das in k quadratische Glied vernachlässigen und erhalten, indem wir die Wurzel bis auf das Glied erster Ordnung entwickeln:

$$\lambda_m = \frac{1}{2n+7}\,(3/2 N\lambda_0 + k(n+9/2)) \quad (20)$$

$$+ 3/2 N\lambda_0 \pm k(n+5/2)) = \frac{1}{2n+7}\,(3N\lambda_0 \mp 2k).$$

Das obere Vorzeichen gilt für die Richtung $\Theta = 0^0$, das untere für $\Theta = 180^0$. Das zu einer transversalen Richtung $\Theta = 90^0$ gehörige λ_m berechnet sich aus der zweiten Gleichung (19) zu

$$\lambda_m = \frac{3N\lambda_0}{2n+7}. \quad (21)$$

Die Theorie ergibt also eine nach den verschiedenen Emissionsrichtungen verschiedene Lage des Intensitätsmaximums; das kurzwelligste Maximum gehört zur Richtung $\Theta = 0$, das langwelligste zu $\Theta = 180^0$. Der Abstand dieser beiden Maxima beträgt nach (20):

$$\Delta\lambda_m = \frac{4}{2n+7}\,k = \frac{6}{2n+7}\sqrt{\frac{2h\lambda_0}{mc}}$$

$$= \frac{1{,}318}{2n+7}\cdot 10^{-4}\sqrt{\lambda_0}. \quad (22)$$

Der Abstand nimmt mit zunehmender Spannung proportional zu $V^{-1/2}$ ab; für eine Strahlung von 50 $k\,V$ ($\lambda_0 = 0.25$ Å) berechnet er sich aus (22), wenn wir für n den Wert 2 einsetzen zu 0,06 Å, bei einer Annahme von $n = 1$ zu 0,07 Å. Beobachtungen, mit denen diese Werte verglichen werden könnten, liegen leider noch nicht vor.

Außer auf die Lage des Maximums hat die Emissionsrichtung noch einen ausgeprägten Ein-

fluß auf die Intensität der Strahlung. Aus den Gleichungen (19) ergibt sich für das Verhältnis der Strahlungsintensitäten in den Richtungen 0^0 und 90^0 bzw. 180^0 und 90^0:

$$\frac{\mathfrak{S}_0}{\mathfrak{S}_{90}} = 1 + \frac{3}{2\lambda}\sqrt{\frac{2h\lambda_0}{mc}},$$

$$\frac{\mathfrak{S}_{180}}{\mathfrak{S}_{90}} = 1 - \frac{3}{2\lambda}\sqrt{\frac{2h\lambda_0}{mc}}. \qquad (23)$$

Der relative Unterschied der Intensitäten nimmt also mit wachsendem λ ab und ist um so bedeutender, je größer λ_0, d. h. je weicher die Strahlung ist. Dieses Ergebnis entspricht völlig den Beobachtungen von Wagner, der die Strahlung einer eigens konstruierten, mit einer Spannung von 10200 Volt ($\lambda_0 = 1{,}18$ Å) betriebenen Röntgenröhre in den Richtungen $\Theta = 90^0$ und $\Theta = 150^0$ untersuchte und feststellte, daß die Intensitäten in der Nähe der kurzwelligen Spektralgrenze annähernd im Verhältnis 1,7 stehen, während sie sich für große Wellenlängen nur wenig voneinander unterscheiden. Aus der zweiten Gleichung (23) berechnet sich für $\lambda_0 = 1{,}18$ Å, wenn wir für h den Wert $6{,}54 \cdot 10^{-27}$ und für m $0{,}903 \cdot 10^{-27}$ einsetzen, das Verhältnis $\frac{\mathfrak{S}_{180}}{\mathfrak{S}_{90}}$ für $\lambda = 1{,}2$ Å zu

$$1 - \frac{3}{2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-8}}\sqrt{\frac{13{,}1 \cdot 1.18 \cdot 10^{-8}}{0{,}9 \cdot 3 \cdot 10^{10}}}$$

$$= 1 - 0{,}30 = 0{,}70.$$

$\mathfrak{S}_{90}$ und $\mathfrak{S}_{180}$ würden darnach für $\lambda = 1{,}2$ Å im Verhältnis $1 : 0{,}7 = 1{,}43$ stehen, ein Wert, der kleiner ist als der von Wagner in der Richtung $\Theta = 150^0$ beobachtete (auffallend große) 1,7. Für $\lambda = 2{,}4$ Å berechnet sich das Verhältnis zu nicht ganz 1,2.

Wir werden weiter unten noch Gelegenheit nehmen, den Einfluß der Richtung auf Intensität und Intensitätsverteilung eingehender durch eine Figur zu erläutern und wenden uns jetzt der Betrachtung der transversalen Strahlung als derjenigen zu, auf die sich für gewöhnlich die Beobachtungen ausschließlich beziehen. Die zu lösende Aufgabe liegt, wie aus der Gleichung (19) hervorgeht, in der Ermittlung der Zahlen N und n. Die Berechnung dieser Zahlen aus den vorliegenden Messungen stößt deshalb auf große Schwierigkeiten, weil sich infolge ungenauer Angabe der Versuchsbedingungen nicht beurteilen läßt, inwieweit die gemessenen Intensitätskurven der von der Antikathode ausgehenden Strahlung entsprechen und nicht durch die Absorption in Glas, Gefäßwänden und Luft entstellt sind. Wenn es irgendwo auf präziseste Feststellung der Versuchsbedingungen ankommt, so ist es bei der Ausmessung eines Röntgenspektrums; denn nirgends ist die Zahl der Fehlerquellen so groß wie hier, besonders dann, wenn mit einer weichen Strahlung gearbeitet wird, da die Absorbierbarkeit der Strahlen mit zunehmender Wellenlänge außerordentlich rasch ansteigt. Was zunächst die Zahl N betrifft, so wird ihre Ermittlung durch die Gleichung (21) ermöglicht, der zufolge N gegeben ist durch

$$N = \frac{2n + 7}{3}\frac{\lambda_m}{\lambda_0}. \qquad (24)$$

Aus den Ulreyschen Untersuchungen, nach denen λ_m sich mit V wie $V^{-1/2}$ ändert, würde darnach für N wegen (2) Proportionalität zu $V^{1/2}$ folgen. Diese Beziehung hat denn auch der Verfasser den beiden vorausgehenden Mitteilungen zugrunde gelegt, mußte sich aber inzwischen überzeugen, daß an ihr nicht festgehalten werden kann. In der nachstehenden Tabelle sind die von Ulrey bei den angegebenen Spannungen gemessenen Werte von

V in Kilovolt	λ_0	λ_m	λ_m berechnet
50	0,250	0,470	0,562
40	0,310	0,500	0,616
35	0,355	0,520	0,655
30	0,405	0,555	0,760
25	0,490	0,620	0,883
20	0,615	0,710	1,150

λ_0 und λ_m zusammengestellt; daß die aus diesen Zahlen sich ergebende Beziehung $\lambda_m = \text{const.}\, V^{-1/2}$ keine allgemeine Gültigkeit haben kann, geht schon daraus hervor, daß sich für Spannungen unterhalb 14 Kilovolt Werte von λ_m ergeben würden, die kleiner sind als die von λ_0. Die Ursache dieser Unstimmigkeit kann nur darin liegen, daß die Ulreyschen Messungen sich auf eine durch Absorption in der Zusammensetzung geänderte Strahlung beziehen. Leider fehlen alle Anhaltspunkte, um den Einfluß, den das Glas der Röhre usw. auf die Strahlung genommen haben, abzuschätzen und so auf die Ausgangsstrahlung zurückzuschließen. Wäre die Dicke der von den Strahlen durchsetzten Wände genau bekannt, so könnten die wahren Werte von λ_m aus den gemessenen Zahlen mit Hilfe der Absorptionsgesetze ermittelt werden. Die durch einen absorbierenden Körper bewirkte Änderung von λ_m läßt sich am bequemsten berechnen, wenn man sich nach dem Vorgang des Verfassers des Begriffes der „Filterstärke" bedient. Die Herleitung dieses Begriffes ist die folgende: Bekanntlich wird durch einen Körper von der Dicke d eine Wellenlänge λ im Verhältnis $e^{-\alpha d}$ geschwächt, wenn α den Absorptionskoeffizienten für die betrachtete

Wellenlänge bedeutet. Nach Kossel und Siegbahn ist α für alle Stoffe annähernd proportional zu $\lambda^{2,8}$:

$$\alpha = \varkappa \lambda^{2,8},$$

wobei sich der Faktor $\varkappa$ aus der Dichte ϱ und der Ordnungszahl Z des absorbierenden Stoffes nach einer von Glocker angegebenen Formel berechnen läßt. Unter der Filterstärke f eines Stoffes ist nun das Produkt $\varkappa \cdot d$ verstanden, sodaß die Schwächung einer Wellenlänge λ gleich $e^{-f \cdot \lambda^{2,8}}$ wird. Die durch ein Filter von der Stärke f geschwächte Strahlung (19) ist daher in der Abhängigkeit von λ darstellbar durch den Ausdruck

$$e^{-\frac{3 N \lambda_0}{2 \lambda}} \cdot \frac{1}{\lambda^{n+1/2}} e^{-f \cdot \lambda^{2,8}}.$$

Für die Wellenlänge λ_m des Maximums ergibt sich daraus die Gleichung:

$$\frac{3 N \lambda_0}{2 \lambda^2} \frac{1}{\lambda^{n+1/2}} - \frac{n+1/2}{\lambda^{n+3/2}} - \frac{f \cdot 2{,}8\, \lambda^{1,8}}{\lambda^{n+1/2}} = 0$$

oder

$$3/2 N \lambda_0 = (n + 1/2)\, \lambda_m + 2{,}8 \cdot f \cdot \lambda_m^{3,8}.$$

Da $\frac{3 N \lambda_0}{2 (n+1/2)}$ nach (21) die wahre Lage λ_m' des Maximums bestimmt, so ergibt sich für die durch die Absorption bewirkte Verlagerung $\lambda_m' - \lambda_m$ des Maximums:

$$\lambda_m' - \lambda_m = \frac{2{,}8\, f}{n+1/2} \lambda_m^{3,8}, \qquad (25)$$

d. h. durch die Filterung wird das Maximum nach der Seite der kurzen Wellenlängen um einen Betrag verschoben, der proportional ist der Filterstärke f; bei gleicher Filterstärke ist die Verschiebung um so größer, je weicher die Strahlung, je größer also λ_m ist.

Der Satz (25) würde uns in den Stand setzen, aus den in der Tabelle angegebenen Werten von λ_m die wahren Lagen des Maximums zu berechnen, wenn die Filterstärke f der von den Strahlen durchsetzten Wände bekannt wäre. Nimmt man versuchsweise eine Filterung durch 0,5 mm Glas ($f = 2{,}6$) an — bei den gebräuchlichen Röhren hat das Glas in der Kugel durchschnittlich diese Dicke —, so ergeben sich für λ_m', wenn man für n den weiter unten wahrscheinlich gemachten Wert 1 einsetzt, die in der vierten Kolonne der Tabelle angegebenen Zahlen. Es zeigt sich, daß sich λ_m' mit V nicht, wie λ_m, proportional zu $V^{-1/2}$, sondern angenähert wie $V^{-2/3}$ ändert. Wenn auch dieses Ergebnis natürlich ganz unverläßlich ist, so kann doch als sicher gelten, daß in der Beziehung

$$\lambda_m' = \text{const.}\, V^{-p}$$

der Wert des Exponenten p größer sein muß als $1/2$ und vermutlich zwischen 1 und $3/4$ liegt. Eine von Wagner bei einer Spannung von 10,2 Kilovolt aufgenommene Intensitätskurve, die sich auf eine durch ein dünnes Aluminiumfenster austretende, also nahe ungefilterte Strahlung bezieht, erreicht ihr Maximum bei etwa $\lambda_m = 1{,}7$ Å; dieser Wert von λ_m für $\lambda_0 = 1{,}18$ Å würde sich recht gut in das Gesetz $p = 3/4$ einordnen. Wir wollen vorläufig, ohne einer Entscheidung durch neue Versuche vorzugreifen, $p = 5/8$ setzen und haben dann für N wegen (24) Proportionalität zu $V^{5/8}$ anzunehmen.

Um den Wert des Exponenten n zu bestimmen, berechnen wir die gesamte in der Richtung $\Theta = 90^0$ ausgestrahlte Energie S und vergleichen das Ergebnis mit dem von Ulrey gefundenen Gesetz, wonach S mit der Spannung V annähernd wie V^2 wächst. Wir bemerken aber, daß sich aus den Messungen diese Proportionalität nur für die kleinen Spannungswerte ergibt, während für die höheren Spannungen S merklich langsamer als V^2 ansteigt. Es erklärt sich dieses Verhalten zwanglos aus dem Einfluß der Absorption. Da nämlich die Absorption die langen Wellen viel stärker trifft als die kurzen, so bewirkt sie eine um so bedeutendere relative Schwächung der Gesamtintensität, je weicher die Strahlung ist; mit zunehmender Spannung nähert sich das Verhältnis der gefilterten zur ungefilterten Strahlung immer mehr dem Wert 1. An der Zunahme der Intensität mit wachsender Spannung sind daher zwei Faktoren beteiligt; der eine Faktor ist die Spannung als solche, der andere der mit wachsender Spannung sinkende Einfluß des Filters. Für hohe Spannungen tritt die Wirkung des zweiten Faktors immer weiter zurück, sodaß in demselben Maß die wahre Abhängigkeit der Intensität von der Spannung immer deutlicher zutage tritt. Wir müssen daher aus dem beobachteten Verhalten von S schließen, daß S etwas langsamer als V^2 ansteigt.

Zur Berechnung von S ziehen wir den Ausdruck (18c) heran und finden:

$$S = \text{const.}\, i \frac{N^{3/2}}{\lambda_0^{5/2}} \int_0^\infty e^{-\frac{3 N \nu}{2 \nu_0}} \nu^{n+3/2}\, d\nu.$$

Als obere Grenze des Integrals wäre streng genommen ν_0 zu nehmen; da aber der Integrand für $\nu > \nu_0$ nahe Null ist, so können wir ν_0 mit unendlich vertauschen. Das Integral läßt eine $n+1$ malige partielle Integration zu und führt auf den Ausdruck

$$\left(\frac{2 \nu_0}{3 N}\right)^{n+1} (n+3/2)(n+1/2) \ldots 3/2 \int_0^\infty e^{-\frac{3 N \nu}{2 \nu_0}} \nu^{3/2}\, d\nu.$$

Setzen wir hierin $\nu = x^2$, $d\nu = 2x\,dx$, so erhalten wir

$$\text{const.}\left(\frac{\nu_0}{N}\right)^{n+1}\int_0^\infty e^{-\frac{3Nx^2}{2\nu_0}}\,x^2\,dx = \text{const.}\left(\frac{\nu_0}{N}\right)^{n+3/2}.$$

Somit wird S:

$$S = \text{const.}\,i\,\frac{N^{3/2}}{\nu_0^{3/2}}\left(\frac{\nu_0}{N}\right)^{n+3/2} = \text{const.}\,i\,\frac{\nu_0^{n+1}}{N^n}. \quad (26)$$

Da ν_0 wie V, N wie $V^{3/2}$ wächst, so kommen wir der Erfahrung am nächsten, wenn wir $n = 1$ setzen; es wird dann S proportional zu $V^{3/2}$, was den Ulreyschen Versuchen am besten entsprechen dürfte.

Mit den Werten $p = 5/8$, $n = 1$ erhalten wir für die Funktion $\mathfrak{S}_\lambda$ aus (19), indem wir ${}^3/_2 N\lambda_0 = \varkappa\lambda_0^{5/4}$ setzen:

$$\mathfrak{S}_\lambda = C\cdot i\,\lambda_0^{5/16}\,e^{-\frac{\varkappa\lambda_0^{5/4}}{\lambda}}\,\frac{1}{\lambda^{4,5}}. \quad (27)$$

$\varkappa$ bedeutet eine von den Versuchsbedingungen unabhängige Konstante, C einen Faktor, der von der Natur der Antikathode abhängt. Daß die Gleichung (27) auf Endgültigkeit keinen Anspruch erheben kann und will, mag ausdrücklich festgestellt werden. Mehr als eine qualitative Übereinstimmung mit der Erfahrung zu erreichen, kann vorläufig, solange nicht neue Untersuchungen eine schärfere Prüfung der Theorie ermöglichen, nicht angestrebt werden. Wie weit der Ansatz (27) den Beobachtungen entspricht, geht aus dem Vergleich der in Fig. 2

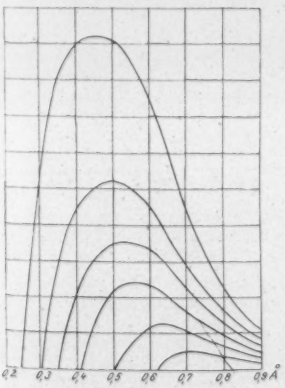


Fig. 2.

aus (27) berechneten mit den (Fig. 3) von Ulrey gemessenen Intensitätskurven hervor. Der Fig. 2

Fig. 3.

liegt für $\varkappa$ der Wert 5,75 zugrunde und es wurde eine Filtrierung von der Stärke $f = 2{,}6$ (0,5 mm Glas) angenommen. Die qualitative Übereinstimmung der Kurven ist befriedigend, nur nehmen die berechneten Intensitätsmaxima mit sinkender Spannung rascher ab als es den Beobachtungen entspricht.

Den aus den Gleichungen (19) berechneten Einfluß der Emissionsrichtung Θ auf die Intensitätsverteilung stellt Fig. 4 dar. Angenommen

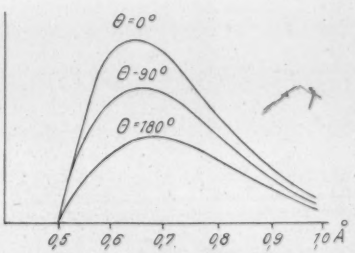


Fig. 4.

ist eine Strahlung von $\lambda_0 = 0{,}5$ Å. Die Intensität in der Richtung $\Theta = 0^0$ ist für alle Wellenlängen größer als für $\Theta = 90^0$, die für 90^0 wiederum durchwegs größer als für $\Theta = 180^0$. Die relativen Unterschiede nehmen im Spektrum mit abnehmender Wellenlänge zu; es folgt daraus, daß die transversale Strahlung im Gesamtcharakter härter ist als die rückläufige, dagegen weicher als die Strahlung, die in der Richtung $\Theta = 0^0$ entsandt wird. Dieser schon von

Friedrich beobachtete und bis auf Wagner[1]) als Dopplereffekt gedeutete Unterschied in der mittleren Härte erklärt sich hier als eine Folge des Impulsgesetzes.

Daß das für den Fall einer konstanten Spannung geltende Gesetz der spektralen Energieverteilung angenähert auch dann noch gilt, wenn die Strahlung durch eine periodisch wechselnde Spannung erregt wird, wurde bereits eingangs erwähnt. Diese auf den ersten Blick überraschende Tatsache wird verständlich, wenn man bedenkt, daß die Strahlungsintensität in jedem Augenblick nahe dem Quadrat der jeweiligen Spannung proportional ist. Es folgt daraus, daß die Strahlung zum überwiegenden Teil durch die in der Nähe des Maximums V_m liegenden Spannungswerte zustande kommt. V_m bestimmt daher auch den Gesamtcharakter der Strahlung, während die niedrigen Spannungen darauf nur einen untergeordneten Einfluß nehmen. Wir sehen also voraus, daß die spektrale Zusammensetzung der Strahlung von der besonderen Art der Spannungskurve in erster Annäherung unabhängig ist und im wesentlichen nur durch die Scheitelspannung V_m bestimmt wird. Eine periodisch wechselnde Spannung vom Scheitelwert V_m erzeugt, gleichgültig von welcher Art die Periodizität sein mag, eine Strahlung von annähernd derselben Beschaffenheit wie eine konstant wirkende Spannung vom Betrag V_m. Doch ist zu bemerken, daß nur die spektrale Zusammensetzung, nicht aber die auf gleiche Stromstärke bezogene Intensität der Strahlung von der Art der Spannungskurve unabhängig ist. Es ist leicht einzusehen, daß bei gleicher mittlerer Stromstärke und gleicher Scheitelspannung V_m die Strahlung um so intensiver sein muß, je mehr in der Spannungskurve die niederen Teile gegenüber den hohen zurücktreten.

Wenn wir die Ergebnisse der vorstehenden Untersuchung noch kurz zusammenfassen, so erscheint uns am wesentlichsten, daß die Energieverteilung im kontinuierlichen Röntgenspektrum durch eine einzige Größe, die kürzeste Wellenlänge λ_0, eindeutig definiert ist. Auf diesem Ergebnis, das als experimentell und theoretisch gesichert gelten kann, bauen sich die Methoden der Radiographie (Staunig) sowie der Strahlentherapie (Fritz und Verf.), die am Innsbrucker Zentralröntgeninstitut ausgearbeitet wurden[2]). Die endgültige Form des Strahlungsgesetzes steht noch nicht fest, der Ansatz (27) ist nur als vorläufiger Versuch zu betrachten. Hoffen wir, daß es auf Grund neuer Untersuchungen bald möglich sein wird, die noch offenen Fragen zu entscheiden.

(Eingegangen 25. Juni 1921.)

1) Wagner hat schon auf der Naturforscher-Versammlung in Nauheim die hier vertretene Auffassung klar ausgesprochen. Vgl. diese Zeitschr. **21**, 621, 1920.
2) Demnächst erscheinende Aufsätze in den Fortschritten auf dem Gebiet der Röntgenstrahlen.

Zur Präzision der Fall- und Steigversuche.

Von Erich Schmid.

1. Zweck der Arbeit.

Aus einer Serie von Fall- oder Steigzeiten über dieselbe Distanz l berechnet sich bekanntlich die mittlere Fall-, bzw. Steiggeschwindigkeit und die Konstante der Brownschen Bewegung — das mittlere, sekundliche Verschiebungsquadrat — nach den Formeln:

$$v = \frac{l}{\frac{1}{n}\sum t_i}; \qquad \text{(I)}$$

$$\overline{\lambda^2} = l^2\left[\frac{1}{n}\sum\frac{1}{t_i} - \frac{1}{\frac{1}{n}\sum t_i}\right]. \qquad \text{(II)}$$

Für den mittleren Fehler der nach diesen Formeln bestimmten Größen gibt Schrödinger[1]) die Ausdrücke:

$$\frac{\mu(v)}{v} = \frac{\lambda}{\sqrt{lvn}}\sqrt{1+\frac{3\lambda^2}{lvn}} \qquad (1)$$

$$\frac{\mu(\overline{\lambda^2})}{\overline{\lambda^2}} = \frac{\sqrt{2n-1}}{n}. \qquad (2)$$

Wenn das Problem dadurch auch mathematisch erledigt ist, so scheint doch bei der Wichtigkeit, welche die Formeln (I) und (II) bei der Bestimmung des el. Elementarquantums nach der Ehrenhaft-Millikanschen Methode erlangt haben, eine experimentelle Bestimmung ihrer mittleren Fehler, also eine Überprüfung der Formeln (1) und (2), nicht überflüssig.

Der Zweck der vorliegenden Notiz ist es daher, diesen Vergleich zwischen Theorie und Experiment wirklich durchzuführen. Gleichzeitig soll auch die vom Verfasser[2]) für den mittleren Fehler des nach der Fletcherschen Methode berechneten $\overline{\lambda^2}$ fehlerhaft abgeleitete Formel verbessert und einem Vergleich mit der Erfahrung unterzogen werden.

2. Abschätzung des mittleren Fehlers der Fletcherschen Formel.

Nach einer von Fletcher[3]) angegebenen,

1) E. Schrödinger, diese Zeitschr. **16**, 289, 1915.
2) E. Schmid, Wien. Ber. (IIa), **129**, 813, 1920.
3) H. Fletcher, Phys. Rev. **4**, 440, 1914.

von Smoluchowski[1]) korrigierten Methode gilt für das mittlere, sekundliche Verschiebungsquadrat, bzw. dessen halben Reziprokwert, auch die Formel:

$$a = \frac{1}{2\overline{\lambda^2}} = \frac{l}{\pi\tau^2 v^3}\left(1 - \frac{\pi - 2}{8\pi a l v}\right)^2, \qquad \text{(III)}$$

worin $\tau = \frac{t^+ - t^-}{2}$ ist, wobei wieder t^+ das Mittel jener Zeiten bedeutet, die größer sind als das Gesamtmittel und t^- analog für die kleineren Zeiten gilt. l und v bedeuten dieselben Größen wie oben.

Löst man die Gleichung (III) nur unter Berücksichtigung des 1. Gliedes nach $\overline{\lambda^2}$ auf, so erhält man:

$$\overline{\lambda^2} = \frac{\pi\tau^2 v^3}{2l}, \qquad \text{(III}_1\text{)}$$

für welche Form nun die Fehlerschätzung durchgeführt werden soll.

Unter der näherungsweise gültigen Annahme, daß die Anzahl der Zeiten, die größer sind als das Gesamtmittel und jener, welche kleiner als dieses sind, einander gleich und gleich $\frac{n}{2}$ sind,

$$n^+ = n^- = \frac{n}{2}$$

läßt sich τ auch in der Form $\tau = \frac{s^+ - s^-}{n}$ darstellen, worin s^+ und s^- leicht verständliche Symbole bedeuten. Daher ist, wegen:

$$v = \frac{l \cdot n}{s^+ + s^-},$$

$$\overline{\lambda^2} = \frac{n\pi l^2 (s^+ - s^-)^2}{2\,(s^+ + s^-)^3}$$

und

$$\mu^2(\overline{\lambda^2}) = \left(\frac{\partial\overline{\lambda^2}}{\partial s^+}\right)^2 \mu^2(s^+) + \left(\frac{\partial\overline{\lambda^2}}{\partial s^-}\right)^2 \mu^2(s^-).$$

Es ergibt sich weiter:

$$\mu^2(s^+) = (t_1 + t_2 + \ldots + t_{\frac{n}{2}} - s^+_w)^2$$

$$= \frac{n}{2}\left[(t^2)^+ - (t^+)^2\right]$$

und

$$\mu^2(s^-) = \frac{n}{2}\left[(t^2)^- - (t^-)^2\right].$$

Bildet man nun mit Hilfe der Zeitenverteilungsformel:

$$M(t)\,dt = l\sqrt{\frac{a}{\pi}}\, t^{-3/2} e^{-\frac{a(l-vt)^2}{t}}\, dt$$

die verlangten Mittelwerte, so erhält man:

$$\mu^2(s^+) = \mu^2(s^-) = \frac{nlb}{2\pi a v^3},$$

worin $b = \frac{\pi}{2} - 1$ bedeutet.

Für $\frac{\mu^2(\overline{\lambda^2})}{(\overline{\lambda^2})^2}$ findet man daher:

$$\frac{\mu^2(\overline{\lambda^2})}{(\overline{\lambda^2})^2} = \frac{4b}{n}\left(1 + \frac{9}{4\pi a l v}\right),$$

$$\frac{\mu(\overline{\lambda^2})}{\overline{\lambda^2}} = \sqrt{\frac{4b}{n}}\sqrt{1 + \frac{9}{4\pi a l v}}. \qquad (3)$$

Da der 2. Faktor nur sehr wenig von 1 verschieden ist, wird man praktisch:

$$\frac{\mu^2(\overline{\lambda^2})}{\overline{\lambda^2}} = 1{,}07\sqrt{\frac{2}{n}}$$

setzen können.

Das heißt: Schon das erste Glied der Fletcherschen Formel gibt das Verschiebungsquadrat mit nahezu derselben Genauigkeit wie Formel (II).

3. Vergleich der theoretisch und experimentell gegebenen Präzision.

Zur experimentellen Bestimmung des mittleren Fehlers von v und $\overline{\lambda^2}$ müssen begreiflicherweise sehr lange Zeitenserien zur Verfügung stehen. Und da war ich auf jene Messungen angewiesen, welche ich selbst[1]) an Selen ausgeführt habe.

Im folgenden werden die Fallserien der Partikel I und XIII der betreffenden Abhandlung herangezogen, für welche das gesamte Beobachtungsmaterial veröffentlicht ist.

Die 1500 Fallzeiten von Partikel I wurden in Gruppen zu je 10, 20, 50, 100 und 150 Zeiten geteilt und unter der Annahme der aus sämtlichen Zeiten sich ergebenden Werte von Geschwindigkeit und Verschiebungsquadrat als wahre Werte der mittlere Fehler dieser Größen für 10, 20, 50, 100 und 150 Zeiten bestimmt. Fig. 1

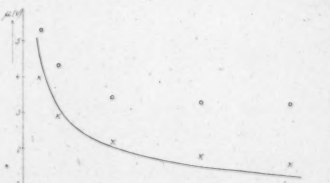


Fig. 1.

1) v. Smoluchowski, diese Zeitschr. **16**, 318. 1915.

1) F. Schmid, l. c.

enthält als Abszisse die Anzahl der Zeiten einer Serie und als Ordinate den dazu gehörigen mittleren Fehler der Geschwindigkeiten in Prozent.

Die Kurve gibt die nach (1) berechneten, die o die experimentell bestimmten Werte. Diese ergeben sich nicht unbeträchtlich größer, doch findet dies seine Erklärung in einer langsamen Änderung der Fallgeschwindigkeit des Teilchens, wie aus Tabelle I, welche die Mittelzeit aus je 100 Fallzeiten enthält, ersichtlich ist.

Tabelle I.

	$\overline{t}$		$\overline{t}$
1. Hund.	14.19	9. Hund.	12,88
2. „	14.06	10. „	13,21
3. „	13.69	11. „	12.87
4. „	13.68	12 „	13.08
5. „	13.32	13. „	13.22
6. „	13.52	14. „	13,02
7. „	13.33	15. „	12,56
8. „	13.37		

Die Zunahme der Fallgeschwindigkeit innerhalb der $10^1/_2$ Stunden dauernden Beobachtung deutet möglicherweise auf eine langsame Zunahme der Masse des Partikels hin. Bestimmt man nun aus den mittleren 500 Zeiten, während welcher die mittlere Fallgeschwindigkeit ziemlich konstant zu sein scheint, neuerlich den Fehler in der Geschwindigkeit, so kommt man zu den $\times$, welche sich mit der theoretischen Kurve in wesentlich besserer Übereinstimmung befinden.

Für Partikel XIII, welches, wie aus Tabelle II hervorgeht,

Tabelle II.

	$\overline{t}$		$\overline{t}$
1. Hund.	11,24	3. Hund.	12,06
2. „	10.54	4. „	11,46

durch 13 Stunden seine Masse beizubehalten scheint, ist in Fig. 2 in analoger Weise der Vergleich durchgeführt. Die Anzahl der gemessenen Fallzeiten beträgt hier 400.

Nach (II) wurde nun auch für jede der Gruppen, in welche die Serien geteilt wurden, $\overline{\lambda^2}$ und hierauf dessen mittlerer Fehler bestimmt. Der Vergleich mit dem hierfür von der Theorie geforderten Wert ist in Fig. 3 durchgeführt, welche wieder als Abszisse die Anzahl der Zeiten und als Ordinate den mittleren Fehler im $\overline{\lambda^2}$ in Prozenten enthält. Die glatte Kurve gibt den theoretischen Wert nach (2), die o und □ den experimentellen Wert aus Partikel I und XIII. Die Übereinstimmung ist hier eine durchaus befriedigende. Wird nun $\overline{\lambda^2}$ nach Formel (III_1) und dafür dann der mittlere Fehler bestimmt, so kommt man zu den $\times$ der Fig. 3. (Das zur Abszisse 20 Zeiten gehörige $\times$ wurde aus Partikel XIII berechnet.) Wie ersichtlich, ist der mittlere Fehler dieser Formel nur um weniges größer als der von Formel (II), wie dies auch theoretisch aus (3) hervorgeht.

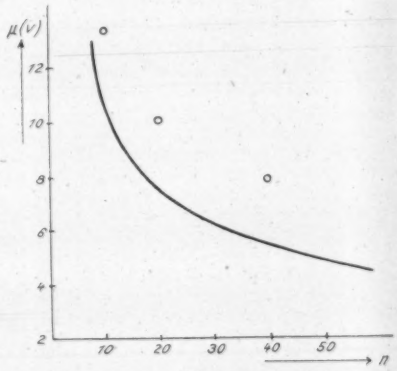


Fig. 2.

In Fig. 4 ist schließlich noch der theoretische und experimentelle mittlere Fehler im in horizontaler Richtung bestimmten $\overline{\lambda^2}$ aufgetragen. Der theoretische Wert ist hier, da $\overline{\lambda^2}_{hor}$ direkt als arithmetisches Mittel bestimmt wird, gleich $\sqrt{\frac{2}{n}}$ [1]). Die Gesamtzahl der ebenfalls an Partikel XIII ausgeführten Bestimmungen beträgt

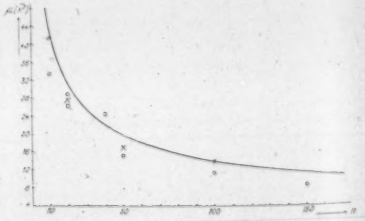


Fig. 3.

420 und ist in Gruppen zu je 10, 20 und 40 Beobachtungen geteilt.

Zusammenfassend kann betont werden, daß die für die Genauigkeit von Geschwindigkeit und mittlerem, sekundlichem Verschiebungsquadrat

1) Vgl. hierzu: E. Schmid, l. c.

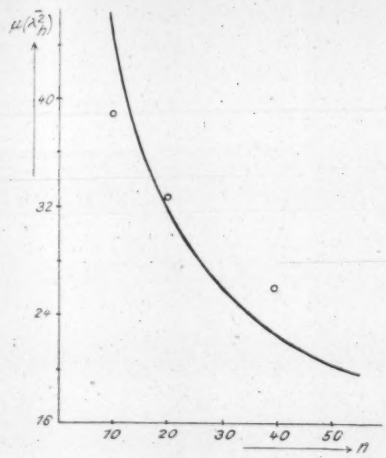


Fig. 4.

aufgestellten Formeln durch die Erfahrung gut bestätigt gefunden wurden. Der mittlere Fehler des nach der Fletcherschen Formel bestimmten Verschiebungsquadrates ergibt sich ca. 1,07 mal so groß als der eines nach der Weißschen Formel (II) bestimmten, so daß in Hinkunft wegen der ungleich geringeren Rechenarbeit vielleicht doch der ersteren der Vorzug zu geben wäre, um so mehr, als die Bestimmung der „oberen" und „unteren" Zeitensumme zur Kontrolle der Ungeordnetheit der Bewegung — wie in der wiederholt zitierten Arbeit des Verfassers dargetan — erforderlich ist.

Wien, II. phys. Lehrk. der Techn. Hochschule, 4. Juni 1921.

(Eingegangen 10. Juni 1921.)

Über die Verwertung des Spiegelbildes in der Photogrammetrie [1]).

(Bemerkung zum Aufsatz des Herrn W. Kramer.)

Von H. Simon.

Nachdem die Inspektion für Waffen und Gerät in Berlin (Dr. H. Kochan) schon im Heft 10 (22, 320, 1921) auf einige Literaturstellen aufmerksam gemacht hat, halte ich es für angebracht darauf hinzuweisen, daß ich bereits im Jahre 1907 die Materie eingehend behandelte. Meine Veröffentlichung „Über Spiegelbild-Photogrammetrie" geschah in der Zeitschrift „Photographische Chronik", welche seinerzeit als Beiblatt zu der Zeitschrift „Das Atelier des Photographen" bei Wilhelm Knapp, Halle, erschien. Die Arbeit beschäftigt sich mit der meßtechnischen Erfassung eines mit seinem Spiegelbild aufgenommenen Gegenstandes und enthält alle diesbezüglichen theoretischen Ableitungen. An Hand mehrerer Versuchsphotogramme ist die praktische Brauchbarkeit des Verfahrens nachgewiesen.

1) Diese Zeitschr. **22**, 24, 1921.

(Eingegangen 25. Juni 1921.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Über Lichtanregung und Ionisation von Atomen und Molekülen durch Stöße langsamer Elektronen.

Von J. Franck.

(Fortsetzung.)

Quecksilber.

Dem Quecksilber soll wie im letzten Bericht ein besonderer Abschnitt gewidmet werden, da es als das am bequemsten dem Elektronenstoßverfahren zugängliche Metall am besten durchforscht ist.

Wir bringen zuerst eine Tabelle der im Quecksilber bestimmten Anregungsspannungen; wie unter „Methoden" erwähnt, sind die Resultate nach dem lichtelektrischen Verfahren gewonnen, ein Beispiel der erhaltenen Kurven ist oben abgedruckt. In der Tabelle IV findet sich unter I eine Aufzählung der Anregungsspannungen in Volt, unter II und III sind die angeregten Serienlinien sowie die Serienbezeichnung nach Paschen und in der letzten Kolumne die theoretisch berechneten Voltwerte zum Vergleich mit den gemessenen aufgeführt.

Eine Durchsicht der Tabelle zeigt, daß die meisten Linien in das Serienschema hineinpassen. Ein Vergleich der Tabelle mit der abgedruckten Kurve ergibt, daß alle den nach dem Serienschema gedeuteten Quantenübergängen stärkere Knicke entsprechen. Einige schwache Knicke passen nicht in das Serienschema; sie sind in die Tabelle mit aufge-

Tabelle IV.

Voltwerte beobachtet	Serienbezeichnung	Wellenlängen	Voltwerte berechnet
4,68	$1,5\,S - 2p_3$	2655,5	4,66
4,9	$1,5\,S - 2p_2$	2537,48	4,86
		2338 Absorptions-	5,28
5,32	—	2313 banden	5,34
5,47	$1,5\,S - 2p_1$	2270,6	5,43
5,76	$2p_3$	2150	5,73
6,04	—	(2043) berechnet aus	—
6,30	—	(1958) beob. Voltwerten	—
6,73	$1,5\,S - 2\,P$	1849,6	6,67
7,12	—	(1733 ber.)	—
7,46	—	(1655 ber.)	—
7,73	$1,5\,S - 1,5\,d$	1603,93	7,69
8,35	—	(1477 ber.)	—
8,64	$1,5\,S - 3p_2$	1435,61	8,58
8,86	$1,5\,S - 3\,P$	1402,7	8,79
	$1,5\,S - 3d_2$	1400,0	8,81
9,37	$1,5\,S - 2p_3$	2656,5	$2 \cdot 4{,}66 = 9{,}32$
9,60	$1,5\,S - 4p_1$	1307,8	9,44
	$1,5\,S - 2p_3$	2656,5	$4{,}66 + 6{,}68 = 9{,}52$
	$+\ 1,5\,S - 2p_2$	$+$ 2537	
9,79	$1,5\,S - 2p_2$	2537	$2 \cdot 4{,}86 = 9{,}72$
	$+\ 1,5\,S - 2p_3$	$+$ 2537	9,73
	$1,5\,S - 4\,P$	1268,9	
10,38	$1,5\,S$	1187,88	10,39

nommen wegen der Sicherheit, mit der auch sie immer wieder auftraten. Die bei hohen Spannungen gelegenen Knicke sind mehrdeutig, da sie sowohl der zweifachen Anregung der Anfangsglieder der Absorptionsserie entsprechen können wie der Anregung kurzwelliger Glieder derselben Serie. Wir möchten betonen, daß der quantenhaften Energieaufnahme nicht prinzipiell die Emission der aus der *hν* Beziehung sich ergebenden Wellenlänge entspricht. Vielmehr kann die Reemission der Energie auch in Stufen vor sich gehen. In einigen Fällen entspricht dem in das Serienschema hineinpassenden Übergang überhaupt keine monochromatische Lichtemission. Diese Verhältnisse sind klarer ersichtlich aus einer schematischen Darstellung des Einfach- und Triplet-Liniensystems des Quecksilbers, in welches die durch Elektronenstoß bewirkten Quantenübergänge durch Pfeillinien eingetragen sind[1]).

Auf einer Abszissenachse sind die Wellenzahlen in willkürlichem Maßstabe aufgezeichnet. Oberhalb dieser Geraden sind die Termreihen des Einfachliniensystems, unterhalb der Abszisse die Termreihen des Tripletsystems eingezeichnet. Die Wellenzahl jedes Terms ist gleich dem senkrechten Abstand von der auf der linken Kante der Figur errichteten

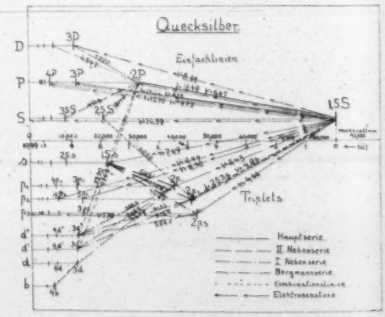


Fig. 14.

Senkrechten. Die jeder Termreihe entsprechenden Punkte befinden sich auf einer Geraden, die parallel zur Abszisse verläuft. Jeder Emissionslinie entspricht ein Übergang zwischen 2 Termen, bei denen sich das azimutale Quant um den Betrag $\pm$ 1 ändert. Die *S*-, *P*- und *D*-Termreihen unterscheiden sich nach Sommerfeld um diesen Betrag voneinander. Daher kommen die hauptsächlichsten ohne Durchbrechung des Auswahlprinzips auftretenden Serien zustande durch Übergänge, die in unserm Serienschema zwischen 2 benachbarten Termreihen stattfinden. Die bekanntesten Spektrallinien sind in dem Schema durch Zeichnung einer Verbindungslinie zwischen den Termen, zwischen denen der Übergang erfolgt, angedeutet. Sie gehorchen, wie

1) Diese Form der Spektrendarstellung ist hier nur flüchtig besprochen; näheres kann ersehen werden aus dem Bericht Bohrs über seinen Berliner Vortrag. Die erste Kenntnis dieser prägnanten Darstellungsweise und auch die Ausführung dieser Zeichnung verdanke ich der Liebenswürdigkeit des Herrn W. Grotrian.

man sieht, alle dem Auswahlprinzip. Für den Elektronenstoß besteht ein solches beschränkendes Prinzip nicht, und so sehen wir durch Pfeillinien angedeutet Übergänge wie 1,5 S—1,5 s, bei denen sich das azimutale Quant gar nicht ändert und Übergänge wie 1,5 S—d_i, bei denen es sich um den Betrag 2 ändert. Darüber hinaus kommen aber, was besonders bemerkenswert erscheint, die Übergänge 1,5 S — $2\,p_1$ und 1,5 S — $2\,p_3$ vor, die durch monochromatische Lichtemission offenbar auch nicht bei Durchbrechung des gewöhnlichen Auswahlprinzips emittiert werden; sonst müßten sie in der Quecksilberlampe, bei der wegen der starken Ionisation sehr große Feldstärken (s. Debye und Holtsmark) sich ergeben, unbedingt beobachtet sein. Die $2\,p_1$- bzw. $2\,p_3$-Bahnen müssen also so beschaffen sein, daß ein freiwilliger Übergang zur 1,5 S-Bahn überhaupt nicht vorkommt. Ist durch einen Elektronenstoß ein Elektron auf die $2\,p_1$-Bahn gehoben, so könnte unter Einwirkung eines äußeren Feldes der Übergang $2\,p_2 - 2\,p_1$ unter Emission einer ultraroten Linie stattfinden und von hier aus das Elektron unter Emission von 1,5 $S - 2\,p_2$, also der Resonanzlinie 2536 Å. in den Normalzustand zurückkehren. Ist aber die Bahn $2\,p_2$ durch Elektronenstoß erreicht, so ist eine Rückkehr in den Normalzustand auch unter der Einwirkung äußerer Felder unmöglich, wenn der Übergang 1,5 $S - 2\,p_3$ nicht stattfinden kann. In diesem Fall muß das angeregte Atom in diesem von uns so genannten metastabilen Zustand verharren, bis es z. B. durch einen weiteren Elektronenstoß in einen höheren Quantenzustand kommt, aus dem es unter Lichtemission in den Normalzustand zurückkehren kann. Man sieht, daß durch das Auftreten metastabiler Zustände die Wahrscheinlichkeit für eine Ionisation des Atoms durch mehrfach hintereinander folgende Stöße langsamerer Elektronen, als sie zur Ionisation in einem Zuge gebraucht werden, wesentlich steigt. Dieser Umstand mag auch für die Möglichkeit des Brennens eines Lichtbogens in dichtem Dampf bei kleinen Potentialgradienten eine wesentliche Bedeutung haben. Da die Behandlung dieses Problems vom Hauptthema fortführt, so mag die untenstehende Anmerkung genügen[1]). Auch auf den Einfluß, den man für die Untersuchungen über Absorption des Lichtes erwarten muß, wollen wir hier nicht näher eingehen, sondern nur die zweite und vermutlich noch häufiger auftretende Möglichkeit des Zerfalls des metastabilen Zustandes besprechen. Sie besteht darin, daß durch Zusammenstöße von metastabilen mit normalen Quecksilberatomen Doppelmoleküle sich bilden, die ihrerseits bei Zusammenstößen mit andern Atomen unter Emission von Bandenstrahlung zerfallen. Über Bildung und Zerfall solcher Doppelmoleküle aus angeregten Atomen haben Franck und Grotrian[3]) a. a. O. berichtet. Es handelte sich dort um die Bildung eines Hg_2 aus einem Atom, das durch Absorption der Resonanzstrahlung angeregt ist, und einem Normalatom. Alles dort Gesagte läßt sich sinngemäß auf den Fall des metastabilen Quecksilbers übertragen. Die beiden geschilderten Wege des Zerfalls des metastabilen Zustandes ergeben kein Licht der Frequenz, die sich aus der $h\nu$-Beziehung bzw. dem Serienschema berechnet, und liefern trotzdem in Übereinstimmung mit dem Resultat bei den entsprechenden Elektronengeschwindigkeiten eine Lichtemission, die einen Photoeffekt hervorruft. Schließlich mag erwähnt werden, daß die nicht in das Serienschema passenden, durch schwache Knicke der lichtelektrischen Kurven nachgewiesenen Anregungsspannungen sehr wohl Quantensprünge der metastabilen Atome bzw. der gebildeten Moleküle sein können. Ein alle Einzelheiten berücksichtigendes Bild er-

1) Wie in der mehrfach zitierten Zusammenfassung von Franck u. Hertz näher ausgeführt wurde, hat van der Bijl darauf hingewiesen, daß die in Lichtbogen bei niederem Potentialgefälle und hohem Druck beobachtete Ionisation zustande kommen könne durch mehrere Elektronenstöße, d. e ein Atom so schnell hintereinander treffen, daß die von einem Stoß übertragene Energie noch nicht ausgestrahlt ist, ehe der nächste Stoß das Atom in einen noch höheren Quantenzustand wirft. So kommt dann die Ionisation zustande, obgleich kein Elektron die kinetische Energie besitzt, die gleich der Ionisierungsarbeit ist. Hiermit steht in Übereinstimmung, daß die niedrigste Zündspannung eines Lichtbogens zwischen einer Glühkathode und einer normalen Anode gleich der Resonanzspannung gefunden wurde. Compton[1]) hat unterdes die Wahrscheinlichkeit für solche Stoßhäufigkeiten ausgerechnet unter Benutzung des Wertes von 10^{-8} sec für die mittlere Lebensdauer des Anregungszustandes. Er findet sie zu klein, um die beobachteten Resultate zu erklären. Eine Deutung sieht er darin, daß die bei der Rückkehr in den Normalzustand ausgesandte Strahlung von Nachbaratomen durch Absorption wieder aufgenommen wird. Somit wandert die Anregung von einem zum andern Atom, und die Wahrscheinlichkeit, daß ein angeregtes Atom von einem Elektron getroffen wird, wächst wesentlich. Zu diesem Einfluß, der sicher vorhanden sein wird, kommt die Wirkung der langen Lebensdauer einiger metastabiler Anregungszustände hinzu. Als ebenfalls hierher gehörig ist die äußerst interessante Theorie von Klein und Rosseland[2]) zu nennen, die den quantenhaften Zuwachs der Geschwindigkeit langsamer Elektronen beim Zusammenstoß mit angeregten Atomen behandelt. Dieser Vorgang ist die genaue Umkehrung des hier besprochenen Prozesses.

1) Compton, Phys. Review. **15** (2), 130 und 476, 1920.

2) Klein u. Rosseland, Zeitschr. f. Phys. **4**, 46, 1921.

3) J. Franck u. W. Grotrian, Zeitschr. f. Phys. **4**, 89, 1921.

gibt sich erst, wenn die lichtelektrische Methode durch parallele spektroskopische Beobachtungen ergänzt wird, wie das für die Resonanzlinien in weitgehendstem Maße geschehen ist. Die Schwierigkeit solcher Untersuchungen besteht in der großen Lichtschwäche der Spektrallinien bei ihrer Anregung durch solche Elektronen, die gerade eben die entsprechende Energie besitzen. Zu den im letzten Bericht besprochenen derartigen Untersuchungen sind einige neue hinzugekommen. Foote und Meggers[1]), denen wir viele der oben angeführten Experimente über Resonanzspannung verdanken, haben den Versuch unternommen, durch genaue Photometrierung die Grenzgeschwindigkeiten der Elektronen zu bestimmen, bei der die verschiedenen Linien des Cäsiums angeregt werden. In Übereinstimmung mit der Erwartung traten von einer nicht genau festlegbaren Elektronengeschwindigkeit an zuerst die Dupletlinien $1{,}5\ s - 2\ p_{1,2}$ mit weiterwachsender Spannung erscheinen $1{,}5\ s - 3\ p$, dann $2\ p_1 - 5\ d$, dann trat Ionisation ein und mit ihr das ganze Linienspektrum. Sobald die Ionisation eingetreten ist, haben alle Linien zueinander ein konstantes, von der Spannung unabhängiges Intensitätsverhältnis; mit abnehmender Spannung nimmt das Verhältnis der Stärke der Resonanzlinien zu den beiden oben erwähnten anderen Linien sehr schnell zu, bis schließlich nur die Resonanzlinien übrig bleiben. Wertvoll ist der Nachweis, daß das Auftreten des Einlinienspektrums reell ist und nicht durch die große Stärke der Resonanzlinien vorgetäuscht wird. Die weiteren Schlüsse der Autoren, daß es nur 2 Gruppen von unelastischen Stößen gäbe, diejenigen, die Resonanzlicht anregen, und diejenigen, welche ionisieren, scheinen uns nicht aus dem Beobachtungsmaterial der Verfasser hervorzugehen und stehen auch im Widerspruch zu den oben geschilderten experimentellen Befunden beim Quecksilber. Eine weitere Methode, die ebenfalls bisher nur qualitativ die Reihenfolge der Anregungsspannung ergibt, ist die neuerdings von Seeliger[2]) angewandte, mit der er die Anregungsfunktion von Spektrallinien studiert. Beobachtet wird hier der Intensitätsanstieg von Spektrallinien im Glimmlichtsaum als Funktion des Abstandes der Emissionsstelle von der Kathode. Der kleinsten Anregungsspannung entspricht der größte Abstand von der Kathode. Im Quecksilberdampf erhält Seeliger folgende Reihenfolge der Anregungsspannungen, wenn man von großen zu kleinen Werten fortschreitet: Funkenlinien, erste Nebenserie der Einfachlinien, erste Tripletnebenserie, zweite Nebenserie der Einfachlinien, zweite Tripletnebenserie, 2536 Å., 2847. Bis auf die Linie 2847 stimmt dieses Resultat, dessen theoretische Deutung Seeliger sich für später vorbehalten hat, mit den oben erwähnten, aus den lichtelektrischen Kurven sich ergebenden Schlüssen und mit den Zusammenhängen, die sich nach Bohr aus dem Serienschema folgern lassen, vollkommen überein. Die Seeligersche Reihenfolge ist gerade die, die man aus dem Serienschema der Fig. 14 direkt ablesen kann. In diesem Zusammenhange mögen ferner die neuen Füchtbauerschen Resultate über Quecksilberfluoreszenz (diese Zeitschr. **21**, 635, 1920) erwähnt werden, da sie eine eindrucksvolle Bestätigung der Bohrschen Auffassung der Serienzusammenhänge ergeben. Füchtbauer zeigte z. B., daß Fluoreszenz des *Hg*-Dampfes im Lichte des Triplets $1{,}5\ s - 2\ p_{1,2,3}$ nur auftritt, wenn durch gleichzeitige Bestrahlung mit dem Licht der Wellenlänge $1{,}5\ S - 2\ p_2$ die Grundbahn $2\ p_2$ geschaffen wurde.

1) Foote u. Meggers, Phil. Mag. **40**, 1920.
2) Seeliger, siehe z. B. Zeitschr. f. Phys. **2**, 405, 1920.

Edelgase.

Helium.

Das Helium mit seinen 2 Elektronen ist das einfachste Atom neben dem Wasserstoff. Daher sind viele Versuche, um zu einer genauen Kenntnis seiner Elektronenanordnung zu gelangen, ausgeführt. Ein Vergleich der theoretischen Schlüsse mit der Erfahrung läßt sich unter Benutzung der optischen Ergebnisse nur bis zu einem gewissen Grade ausführen, da die beiden Spektralsysteme, dasjenige des sogen. Parheliums und das des Orthoheliums, soweit sie optisch bekannt sind, beim Zurückfallen von Elektronen in höhere Quantenbahnen emittiert werden. Die eigentliche Absorptionsserie des Heliums liegt im optisch bis in die neueste Zeit nicht zugänglichen Ultraviolett, so daß durch die Elektronenstoßmethode eine notwendige Ergänzung vorgenommen werden mußte.

Der alte von Franck und Hertz ursprünglich für die Ionisierungsspannung gehaltene Wert von ca. 20,5 Volt hat sich, wie bei Abfassung des vorigen Berichtes vermutet, als erster unelastischer Stoß herausgestellt. Wir möchten diesen Wert im Gegensatz zu den meisten Beobachtern nicht Resonanzpotential, sondern Umwandlungsspannung des Heliums nennen. Die Begründung dieser Bezeichnung folgt weiter unten. Die von verschiedenen Be-

obachtern für die Umwandlungsspannung erhaltenen Werte sowie die benutzten Methoden sind, soweit sie nicht schon im alten Referate aufgeführt sind, in folgender Tabelle zusammengestellt:

Tabelle.

20,4 Volt	Frank Horton u. Ann Davies, Proc. Roy. Soc., London (A) **95**, 408, 1920.	Lichtelektrisches Verfahren.
20,45 „	Franck u. Knipping, Diese Zeitschr. **20**, 481, 1919 u. Zeitschr. f. Phys. **1**, 320, 1920.	Lichtelektrisches Verfahren.
20,2 „	K. T. Compton, Phil. Mag., Nov. 1920.	Lenardschaltung mit drehbarem Auffänger.
20,8 „	Stead u. Gossling, Phil. Mag., Okt. 1920	Verstärkerrohr.
20,5 „	Found, Phys. Rev. (2) **15**, 132, 1920	Verstärkerrohr.

Die Übereinstimmung der Werte untereinander ist gut, desgleichen stimmen sie mit dem Quantensprung überein, den Kossel aus einer interessanten Extrapolation der $K\alpha$-Reihe der Röntgenserien für das Heliumatom ableitet. Die genauesten Werte sind wohl der von Frank Horton, Ann Davies und der von Franck und Knipping erhaltene. Ihre Genauigkeit wird auf $\pm$ 0,25 Volt geschätzt; wenn ein Fehler vorliegt, so dürfte der Wert eher etwas zu hoch als zu niedrig sein. Die von Found, Stead und Gossling mit dem Verstärkerrohr ausgeführten Bestimmungen sind von den Verfassern als Ionisierungsspannung angesprochen worden. Da aber unreines Helium verwandt wurde, so ist die Ionisation auf eine durch Strahlung verursachte Ionisation der Verunreinigungen zurückzuführen.

Die Ionisierungsspannung des Heliums ist von Frank Horton und seinen Mitarbeitern sowie von Franck und Knipping je zweimal bestimmt. Die erhaltenen Resultate sind:

25,3 Volt F. Horton u. A. Davies, loc. cit.
25 „ F. Horton u. Doris Bailey,
25,3 $\pm$ 0,25 Volt Franck u. Knipping, Phil. Mag. **40** (6) 440, 1920. loc. cit.

Weitere Bestimmungen der Ionisierungsspannung können übergangen werden, da sie innerhalb größerer Beobachtungsfehler dasselbe Resultat ergeben. Franck und Knipping zeigten, daß der Abstand der Umwandlungsspannung von der Ionisierungsspannung (4,8 Volt) gleich der Anregungsspannung der Grenzfrequenz der optisch festgestellten Hauptserie des Orthoheliums sei. Durch Zusammenstöße von 20,45 Volt-Strahlen mit Heliumatomen wird offenbar die Grundbahn für diese Serie geschaffen. Danach sollte bei 21,25 Volt die Grundbahn des optisch bekannten Parheliumspektrums liegen, da die Hauptserie des Parheliums eine Grenzfrequenz besitzt, zu deren Anregung 4 Volt gebraucht werden. Eine genaue Untersuchung des zwischen 20,45 Volt und der Ionisierungsspannung liegenden Teils der lichtelektrischen Kurve ergab folgende Resultate:

Tabelle V.

berechnet	gemessen	Serienbezeichnung	berechnete Wellenlängen
aus 20,45 Volt	20,45 Volt	$0{,}5\,S - 1{,}5\,s$	Umwandlungsspannung
21,25 „	21,25 „	$0{,}5\,S - 1{,}5\,S$	585 Å
21,85 „	21,9 „	$0{,}5\,S - 2\,P$	569 Å
23,7 „	23,6 „	$0{,}5\,S - 3\,P$	523 Å
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
25,23 „	25,3 „	$0{,}5\,S$	493 Å

Wie aus der Tabelle ersichtlich, werden außer der Umwandlungsspannung alle Anregungen als solche des Parheliums angesprochen. Die berechneten Werte ergeben sich aus dem Werte von 20,45 Volt durch Addition der Energiebeträge, die sich aus den Termen des optischen, von Paschen und Runge gefundenen Serienschemas ergeben. Die Übereinstimmung ist äußerst befriedigend, wenn auch der bei 23,6 Volt liegende Knick so schwach ist, daß diesem Wert keine allzu große Bedeutung zuzuschreiben ist. Die anderen Knicke sind jedoch sehr sicher zu erhalten; eine nochmalige Untersuchung unter Berücksichtigung der seitdem gemachten Erfahrungen würde wohl noch weitere Glieder der Absorptionsserie ergeben.

Der bei 20,45 Volt mit Umwandlungsspannung bezeichnete Wert zeigt experimentell ein besonderes Verhalten. Er tritt nur auf, wenn dem Helium minimale Verunreinigungen beigemengt werden. Daß er trotzdem dem Helium angehört, ergibt sich aus seiner großen Stärke bei dem Vorhandensein von so wenig verunreinigendem Gas, daß dessen charakteristische Quantensprünge und Ionisierungsspannungen sich nicht bemerkbar machen.

Dieses Verhalten unterscheidet die Umwandlungsspannung von den übrigen Anregungsspannungen; auch diese lassen sich durch ein wenig verunreinigendes Gas verstärken, da die Strahlung, wie erwähnt, die Verunreinigung ionisiert. Aber die Umwandlungsspannung verschwindet in ganz reinem Helium vollkommen, während der übrige Teil der lichtelektrischen Kurve mit seinen Knicken durchaus deutlich bleibt. Dieses Verhalten steht vollkommen in Übereinstimmung mit den theoretischen Schlüssen, die Franck und Reiche[1]), schon ehe dies Resultat vorlag, gezogen haben. Sie nahmen an, daß durch Stöße der 20,45 Volt-Strahlen das normale Helium in ein metastabiles zweiquantiges Orthohelium verwandelt würde, aus dem es nicht unter monochromatischer Lichtemission in den Normalzustand zurückkehren könne. Die Überlegung wird klarer, wenn wir unter Benutzung der erhaltenen Resultate uns ein Serienschema zeichnen, in das, wie beim Quecksilber, die durch Elektronenstoß angeregten Sprünge mit Pfeillinien eingezeichnet sind.

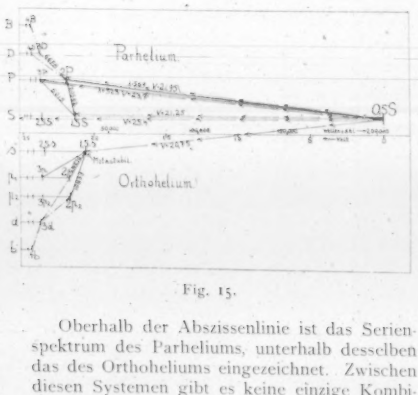


Fig. 15.

Oberhalb der Abszissenlinie ist das Serienspektrum des Parheliums, unterhalb desselben das des Orthoheliums eingezeichnet. Zwischen diesen Systemen gibt es keine einzige Kombinationslinie, auch nicht unter Bedingungen, unter denen das Auswahlprinzip durchbrochen wird; trotzdem müssen beide Spektralsysteme durch Anregung eines normalen Heliumatoms entstehen, wie aus der Tatsache des Auftretens einer einzigen Ionisierungsspannung folgt. Man muß sich entscheiden, ob man den Normalzustand dem Parhelium oder dem Orthohelium zuschreiben will. Nach Franck und Reiche gehört er dem Parhelium an. Landé[1]) hat das Spektrum des Orthoheliums einem Heliumatom zugeschrieben, das gekreuzte Elektronenbahnen hat, das des Parheliums einem Helium mit komplanaren Elektronenbahnen. Ist diese Auffassung richtig, so würde durch Elektronen, die die Umwandlungsspannung durchlaufen haben, das normale gekreuzte Helium in das zweiquantige komplanare verwandelt. Zu diesem Schluß kamen Franck und Reiche durch eine Beobachtung von Paschen[2]), der nachwies, daß die Grundlinie des optisch bekannten Orthoheliumspektrums = 1,08 μ im elektrisch angeregten, ganz reinem Helium das Verhalten einer Resonanzlinie zeigte. Die gesamte Strahlung dieser Wellenlänge, die von angeregtem Helium absorbiert wird, wird mit gleicher Wellenlänge reemittiert; das heißt aber (s. Fig. 15), daß ein Elektron von der $2\,p_{1,2}$-Bahn nur zur 1,5 *s*-Bahn und nicht zum Normalzustand 0,5 *S* zurückkehren kann, obgleich dieser Weg nach dem Auswahlprinzip gestattet sein sollte, da sich dabei das azimutale Quant um den Betrag 1 ändert. Bei Vorhandensein von minimalen Verunreinigungen verliert die Linie 1,08 μ diese Eigenschaft als Resonanzlinie, so daß in diesem Falle eine Rückkehrmöglichkeit des Elektrons in den Normalzustand vorliegen muß. Ist das Gas aber rein, so bleibt ein einmal umgewandeltes Helium in dem Zustand, in dem das Elektron auf der 1,5 *s*-Bahn des Orthoheliums umläuft. Der Zustand ist also metastabil. Wie vorher beim Quecksilber ausgeführt, sind dann zwei Wege zur Zerstörung des metastabilen Zustandes möglich. Der eine führt über den Zustand der Ionisation, der durch weitere Elektronenstöße erreicht wird, der andere über eine Verbindung. Beim Helium sind nun Momentanverbindungen nicht möglich bei einem Zusammenstoß mit andern normalen Heliumatomen. Dagegen treten sie offenbar auf beim Zusammentreffen mit aktiven, den Verunreinigungen zugehörigen Molekülen. Diese zerfallen dann unter Aussendung eines weit im Ultravioletten liegenden Bandenspektrums. Eine Bildung von He_2 aus zwei angeregten Heliumatomen ist unter den Bedingungen, wie sie bei den Untersuchungen vorlagen, sehr unwahrscheinlich. Dagegen dürfte sie bei starken elektrischen Strömen im Entladungsrohr auftreten. Auf diesen Zusammenhang mit den Heliumbandenspektren (s. Lenz[3])) sowie auf verschiedene andere hiermit zusammenhängende Beobachtungen einzugehen, führt zu weit. Er-

1) J. Franck u. F. Reiche, Zeitschr. f. Phys. 1, 154. 1920.

1) Landé, diese Zeitschr. **20**, 298, 1919.
2) Paschen, Ann. d. Phys. **45**, 625, 1914.
3) Lenz, Zeitschr. f. Phys. Verhdl. d. D. Phys. Ges. **21**, 632, 1919; diese Zeitschr. **21**, 691, 1920.

wähnt werden muß jedoch die Folgerung, daß es im normalen Helium keine Absorptionsserie des Orthoheliums, sondern nur die des Parheliums geben darf, was mit den obigen Resultaten der Elektronenstoßmethode im Einklang steht. Die geschilderte Auffassung hat neuerdings zwei wichtige Bestätigungen erfahren. Bohr ist in einer bisher noch nicht veröffentlichten Arbeit, deren Kenntnis ich einer freundlichen persönlichen Mitteilung verdanke, zu dem Resultat gekommen, daß in der Tat das Orthohelium im einquantigen Zustand nicht existieren kann, sondern nur vom zweiquantigen Zustand aufwärts vorhanden sein kann. Eine experimentelle Bestätigung können wir einer neuen optischen Untersuchung von Fricke und Lyman[1]) entnehmen, die uns allerdings bisher nur im Auszug zugänglich war. Diese beiden Autoren haben die Resonanzlinie des Heliums mit einem Vakuumgitterspektrographen gesucht und finden als einzige starke Linie in diesem Spektralgebiet die Linie $\lambda = 585$ Å in genauer Übereinstimmung mit obiger Tabelle. Wesentlich ist, daß bei 610 Å., einer Wellenlänge, die der Umwandlungsspannung entsprechen würde, sich keine Linie findet. Die genaue Übereinstimmung der Linie 585 Å. mit der durch das Elektronenstoßverfahren als $1{,}5\ S - 0{,}5\ S$ gedeuteten ist natürlich Zufall; aber sie spricht doch sehr dafür, daß die gezogenen Schlüsse richtig sind. Es darf nicht wundernehmen, daß nur die Linie 585 Å. bei Fricke und Lyman sich zeigt. Wie aus dem Serienschema ersichtlich, ist sie eine Linie, die nur bei Durchbrechung des Auswahlprinzips emittiert wird, denn das azimutale Quant ändert sich um den Betrag 0. Im Entladungsrohr bei einer Stromstärke von 30 Milliampère ist die Durchbrechung des Auswahlprinzips zu erwarten und natürlich auch die Emission der übrigen Linien der Absorptionsserie. Da aber offenbar der ganze Vakuumspektrograph mit verdünntem Helium gefüllt war, so werden alle normalen Linien der Absorptionsserie von den normalen Heliumatomen, die außerhalb der Entladungsfelder liegen, wieder absorbiert bis auf die Linie 585. Dieser Schluß kann deshalb nur mit Vorbehalt gezogen werden, weil in der Fricke-Lymanschen Arbeit keine direkte Angabe sich findet, daß der Spektrograph mit Helium gefüllt sei[2]). Es scheint aber selbstverständlich, daß es so war. Die Autoren beobachten außer der von ihnen ebenfalls als Bestätigung der Franck-Knipping schen Versuche angesehenen Linie 585, noch zwei Linien bei 1640 Å. und 1215 Å., die sie als vermutlich dem Helium angehörig bezeichneten.

Nach den Resultaten des Elektronenstoßverfahrens ist für diese Linien im Spektrum des normalen Heliums kein Platz. Sie gehören vielmehr dem Funkenspektrum des Heliums, das streng wasserstoffähnlich ist, an, und sind auch von Fricke und Lyman als solche aufgefaßt worden. Die Autoren deuten sie als

$$\nu = 4\,N\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) \text{ und } \nu = 4\,n\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right).$$

Auch die Ionisierungsspannung dieses wasserstoffähnlichen $He+$, die theoretisch viermal so groß als die des Wasserstoffatoms ist, d. h. 54,4 Volt beträgt, ist experimentell durch Elektronenstoßmessungen bestätigt worden. Rau[1]) stellte fest, daß die erste Linie der Fowlerserie, die beim Übergang des Elektrons des Heliumions von einer vier- auf eine dreiquantige Bahn ausgesandt wird, durch Kathodenstrahlen von 75—80 Volt Geschwindigkeit in normalem Helium angeregt wird. Durch einen Stoß eines Elektrons dieser Geschwindigkeit muß also in einem Zuge die Ionisierungsarbeit des normalen Atoms und die Überführung des positiven Ions in den vierquantigen Zustand geleistet werden. Dieses Resultat wird durch eine neuere Arbeit von Compton[2]) bestätigt. Da die Ionisierungsspannung des normalen Atoms, wie aus den oben genannten Messungen hervorgeht, 25,3 Volt ist und die Arbeit, die am Heliumion zur Erreichung des vierquantigen Zustands zu leisten ist, 51,0 Volt beträgt, so ergibt sich theoretisch ein Wert von 76,3 Volt, der mit dem beobachteten in guter Übereinstimmung ist. Zur Leistung der Abtrennungsarbeit bei der Elektronen des Heliums in einem Zuge ergibt sich auf die gleiche Weise ein Wert von $25{,}3 + 54{,}4 = 79{,}7$ Volt. Franck und Knipping sowie Frank Horton bestimmten in den obengenannten Arbeiten diese Ionisierungsstufe direkt zu $79{,}5 \pm 0{,}3$ bzw. 80 Volt. Dieses Resultat ist eine indirekte gute Bestätigung der Messung der Ionisierungsspannung des normalen Heliumatoms.

Argon und Neon.

Beim Argon und Neon sind ähnlich wie beim Helium optisch nur die höheren Serien der angeregten Atome beobachtet. Jedoch ist

1) Fricke u. Lyman, Phys. Rev., März 1921.
2) Anmerkung bei der Korrektur: Die Arbeit von Fricke und Lyman ist unterdes im Phil. Mag. 1921 ausführlich erschienen. Wie erwartet, war der Vakuumspektrograph mit verdünntem Helium beschickt.

1) Rau, Med. Ges., Würzburg 1914.
2) Compton, Phys. Rev. 15 (2), 131, 1920.

es bisher nur beim Neon (Paschen[1])) gelungen, das komplizierte Seriensystem der optisch beobachteten Spektren vollständig zu deuten. Beim Argon hat Nissen[2]) eine Reihe von Serien festgestellt, die zeigen, daß das Spektrum sehr kompliziert ist. Die eigentlichen Absorptionsserien sind bei beiden Gasen unbekannt. Die Ergänzung durch das Elektronenstoßverfahren ist noch nicht in dem Maße durchgeführt wie beim Helium. Die alten Werte der Anregungsspannung von Franck und Hertz (damals als Ionisierungsspannung gedeutet), bei Argon 12 Volt und bei Neon 16 Volt, sind in guter Übereinstimmung mit den Kosselschen Extrapolationen der Röntgenserien. Denn nach Kossel ist L_α für Neon 16 Volt und M_α für Argon 12 Volt. Die direkten neuen Bestimmungen scheinen uns fürs erste noch zweifelhaft zu sein. Wie oben unter „Methoden" erwähnt, haben wir Bedenken gegen die Deutung, die Frank Horton und Ann Davies ihren in Neon gewonnenen Kurven geben. Sie geben eine Lichtanregung bei 11,8 Volt an, die wir nach früheren Erfahrungen für eine Lichtanregung einer Verunreinigung halten. Daher ergibt sich bei 16—17 Volt, wo unseres Ermessens die ungefähre Grenze der Lichtanregung liegt, eine Ionisation der Verunreinigung. Eine weitere Ionisation, die die Verfasser aus dem Umkehrpunkte der abgedruckten Kurve entnehmen, halten wir für hervorgerufen durch sekundäre Ionisation. Wir nehmen deshalb in die Tabelle von den 3 Ionisierungsspannungen und den 2 Lichtanregungsspannungen nur diejenigen auf, die wir für reell halten, betonen jedoch, daß weitere Untersuchungen notwendig sind, um die Berechtigung unserer Schlußweise nachzuweisen und auch zur Kontrolle der Absolutwerte, die wir bei Frank Horton als zu hoch bestimmt ansehen.

Tabelle VI.

Anregungsspannung	Ionisierungsspannung	Beobachter u. Methode
16 Volt	—	Franck u. Hertz (siehe alter Bericht).
17,8 „	22,8 Volt	Franck, Horton u. A. Davies, loc. cit.
—	ca. 21 „	Rentschler, Phys. Rev. 14, 503, 1920. Lichtelektr. Methode.

1) Paschen, Ann. d. Phys. 63, 201, 1920.
2) Aage Nissen, diese Zeitschr. 21, 25, 1920.

(Fortsetzung folgt.)

Tagesereignisse.

Preisausschreiben der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften.

„Durch die elektrostatische Theorie der Kohäsionskräfte bei heteropolaren Kristallen lassen sich die wichtigsten elastischen, optischen, thermischen Eigenschaften dieser Körper darstellen. Es soll untersucht werden, ob auch die Zerreißfestigkeit der heteropolaren Kristalle, vor allem der vom Steinsalztypus, durch die elektrostatische Gitterenergie erklärt werden kann, oder ob dazu neue Annahmen über die Kohäsionskräfte erforderlich sind."

Bewerbungsschreiben sind bis zum 1. August 1922 an die Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen einzureichen auf dem Titelblatt mit einem Motto versehen. Dem Bewerbungsschreiben ist ein versiegelter Brief beizufügen, der auf der Außenseite das Motto der Abhandlung, innen den Namen und Wohnort des Verfassers anzeigt.

Der Preis beträgt 2200 M.

Personalien.

(**Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.**)

Habilitiert: An der Universität Tübingen Dr. Peter Neber für Chemie, an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Samson Breuer für höhere Mathematik, an der Technischen Hochschule Hannover Dr. Gustav Doetsch für angewandte Mathematik, an der Universität Frankfurt a. M. Dr. K. Reinhardt für Mathematik, an der Universität Leipzig Dr. Franz Hein für Chemie, an der Technischen Hochschule Wien Dr. Heinrich Salvaterra für chemische Technologie organischer Stoffe, an der Universität Berlin Dr. Gabriel Szegö für Mathematik.

Ernannt: Der frühere ord. Professor an der Universität Greifswald Dr. Adolf Bestelmeyer zum ord. Honorarprofessor für Physik an der Universität Frankfurt a. M., der Privatdozent an der Technischen Hochschule Aachen Dr. Leo Finzi zum ord. Professor für Elektrotechnik ebenda, der a. o. Professor an der Universität Greifswald Dr. Rud. Seeliger zum ord. Professor der Physik ebenda, der ord. Professor für pharmazeutische Chemie an der Universität Greifswald Dr. Peter Dannckwortt zum ord. Professor für Chemie an der Tierärztlichen Hochschule Hannover, der a. o. Professor an der Stanford University California William A. Manning zum ord. Professor der Mathematik ebendaselbst, der Dozent für Chemie an der Universität Manchester Dr. W. I. Jones zum ord. Professor für Chemie an der Universität von Süd-Wales in Cardiff.

In den Ruhestand: Der ord. Professor für Physik an der Universität Rostock Dr. Adolf Heydweiller, der ord. Professor der Chemie an der Tierärztlichen Hochschule Hannover Geh. Regierungsrat Dr. Karl Arnold.

Gestorben: Der ord. Professor der organischen Chemie an der Universität Helsingfors und frühere finnländische Gesandte in Berlin Eduard Hjelt, der frühere ord. Professor der pharmazeutischen Chemie an der Universität Marburg Geh. Regierungsrat Dr. Ernst Schmidt, der frühere ord. Professor der Physik an der Universität Paris Dr. Gabriel Lippmann, der ord. Professor für Analysis an der Universität Nancy Dr. Gaston Floquet, der ord. Professor für Analysis an der Ecole Polytechnique in Paris Dr. G. Humbert, der ord. Professor der technischen Physik an der Universität Rom Dr. Moise Ascoli.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

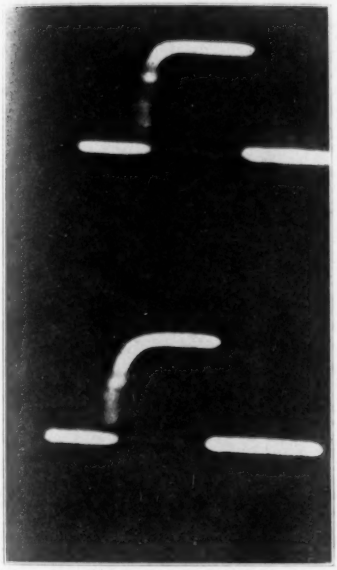


Fig. 3.

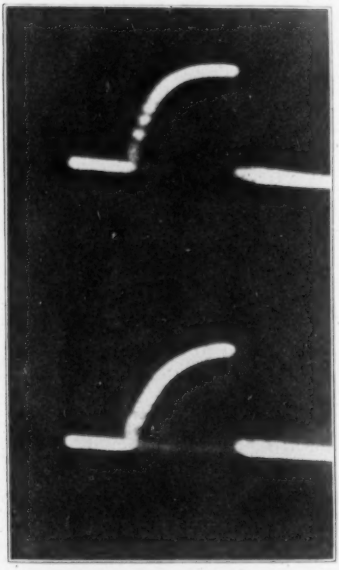


Fig. 4.

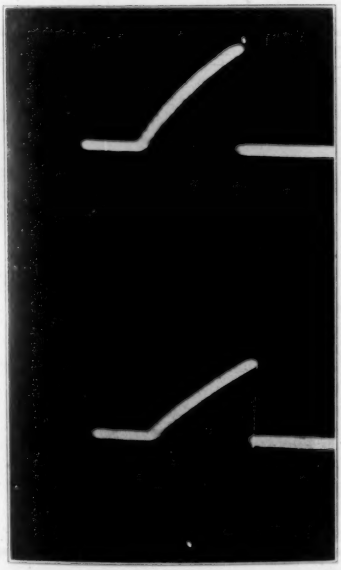


Fig. 5.

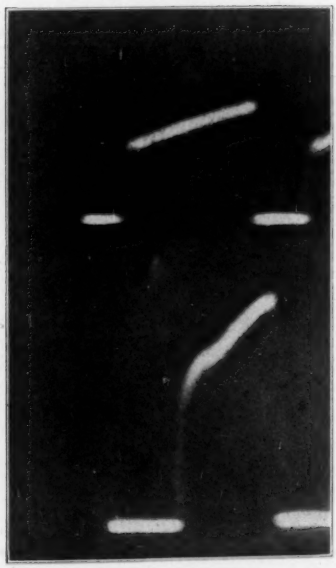


Fig. 6.

Inhaltsverzeichnis:

(Z. B. = Zusammenfassende Bearbeitungen; B. = Besprechungen.)

	Seite
Atombau: Abhandlungen über —, v. N. Bohr. (B.)	472
Bohr, N., Abhandlungen über Atombau. (B.)	472
Edelgase: Der zweite Virialkoeffizient von —, v. F. Zwicky	449
Franck, J., Über Lichtanregung und Ionisation von Atomen und Molekülen durch Stöße langsamer Elektronen. (Fortsetzung und Schluß.) (Z. B.)	466
Grimsehl, E., Lehrbuch der Physik. (B.)	471
Kolkmeijer, N. H., Raum-Zeit-Symmetrie	457
Mathematisch-naturwissenschaftlicher Ferienkursus zu Berlin. (T.)	472
Physik: Lehrbuch der —, v. E. Grimsehl. (B.)	471
Raum-Zeit-Symmetrie, v. N. H. Kolkmeijer	457
Symmetrie: Raum-Zeit- —, v. N. H. Kolkmeijer	457
Virialkoeffizient: Der zweite — von Edelgasen, v. F. Zwicky	449
Zeit: Raum- — -Symmetrie, v. N. H. Kolkmeijer	457
Zwicky, F., Der zweite Virialkoeffizient von Edelgasen	449

Richard Müller-Url, Braunschweig Schleinitzstr. 19

Physikalische, chemische und meteorologische Unterrichts-Apparate und -Utensilien. — Glastechnische Präzisionsarbeiten.

Neuheiten: Coulombmeter nach Stephan D.R.G.M. Righis Röhren für magnetische Strahlen mit Vakuum-Regulierung D.R.G.M. — Quecksilber-Schnellpumpe. — Präzisions-Vakuometer D.R.G.M. — Pizzarello-Apparat. — Apparate für flüssige Luft. — Verflüssigte Gase in Röhren. — Projektions- und Extrem-Thermometer. — Elektroskope und Trockensäulen. Vakuumröhren nach Braun, Crookes Geißler, Puluj, Lecher Röntgen, Wehnelt. — Leuchtschirme. — Normal-Geißlerröhren-Serie „Kompendium". — Original-Vakuumskalen nach Groß

Verlag von S. HIRZEL in LEIPZIG

Gleichen, A., Leitfaden der praktischen Optik. Mit 158 Abb. Groß-8°. 1906. Geh. M. 16.80, geb. M. 27.—

Zum ersten Male ist hier ein Werk geschaffen worden, das die Grundzüge der Theorie der optischen Instrumente, ihre Konstruktion und Berechnung unter Anwendung der ersten Elemente der Algebra darstellt und das daher auch den sich mit der praktischen Optik Beschäftigenden verständlich ist, denen das erforderliche Maß mathematischer Kenntnisse zum Studium anderer Werke meist nicht zur Verfügung steht.

Verlag von S. HIRZEL in Leipzig.

Prinzipien der Atomdynamik von **Dr. J. Stark** In drei Teilen.

I. **Die elektrischen Quanten.** Preis geh. M. 12.—, geb. M. 15.— (Nicht mehr einzeln käuflich.)

II. **Die elementare Strahlung.** Preis geheftet M. 24.—, gebunden M. 30.—

III. **Die Elektrizität im chemischen Atom.** Preis geheftet M. 24.—, gebunden M. 30.— einschließlich Teuerungszuschlag.

Neueste Konstruktion!

Kugelepiskop. D.R.G.M. 204314.

Franz Schmidt & Haensch

Berlin S. 42, Prinzessinnenstraße 16

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.

Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.

Preislisten kostenlos.